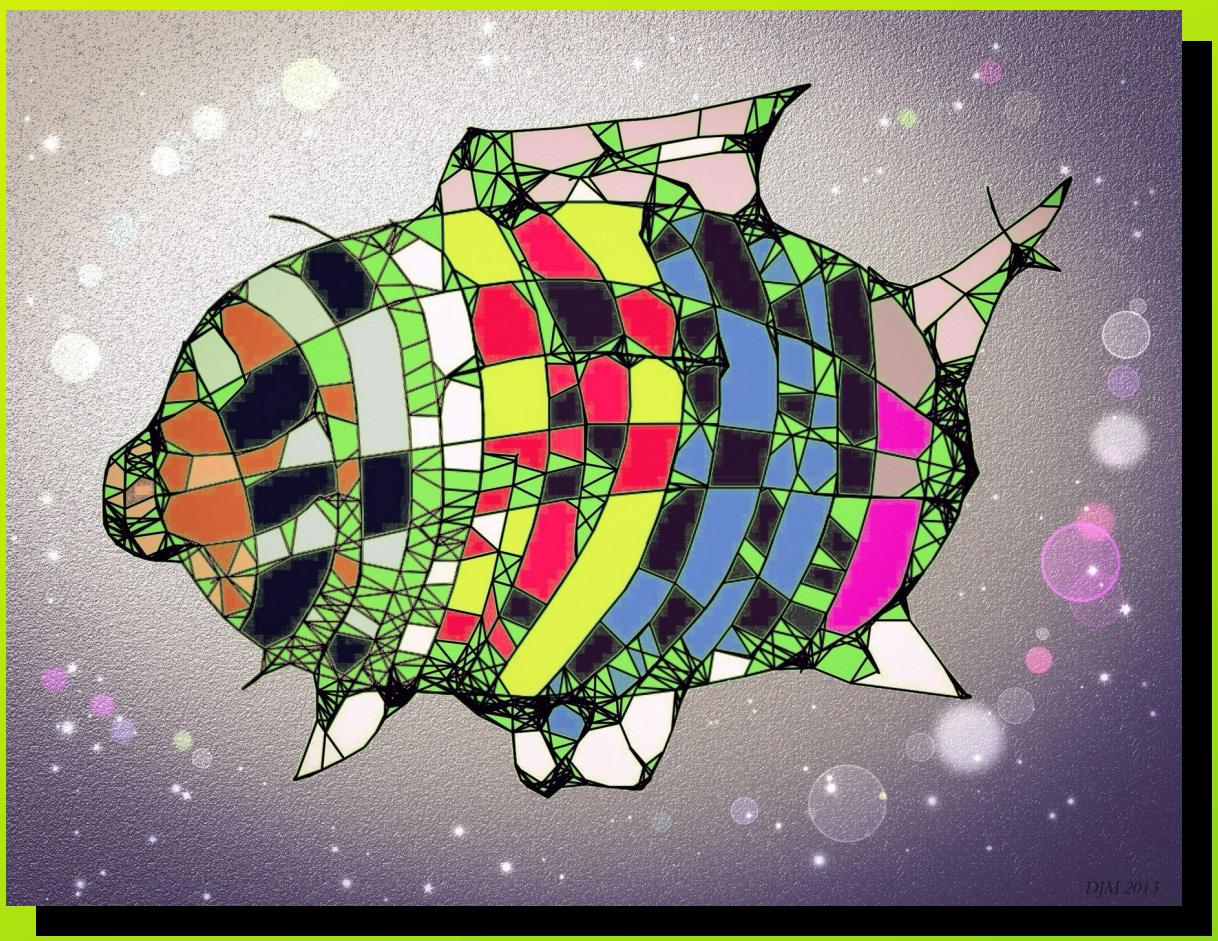
DEVOIRS SUR TABLE OU A LA MAISON DONNÉS EN TERMINALE C EN 1974-1975

proposés par Mme Jeanne MANOTTE
professeur au Lycée Saint-Exupéry de Saint-Raphaël



DEVOIRS SUR TABLE OU A LA MAISON
donnés en TERMINALE C
1974-1975

proposés par Mme Jeanne MANOTTE, professeur
au Lycée Saint-Exupéry de Saint-Raphaël

recueillis par son élève Dany-Jack Mercier et publiés comme
témoignage de l'enseignement des mathématiques à cette époque

1. Mardi 17 septembre 1974
2. Jeudi 26 septembre 1974
3. Jeudi 3 octobre 1974
4. Jeudi 17 octobre 1974
5. Mercredi 20 novembre 1974
6. Jeudi 28 novembre 1974
7. Jeudi 9 janvier 1975
8. Jeudi 23 janvier 1975
9. Jeudi 13 février 1975
10. Jeudi 6 mars 1975
11. Jeudi 13 mars 1975
12. Vendredi 2 mai 1975

Mercier Dany-Jack
TC2

12/20

Mardi 17 septembre 1974

Mathématique

I Résoudre :

2 fautes

1°/ $\cos x + \sin x = 0$

2°/ $\cos x - \sin x + 1 = 0$

3°/ $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} - \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$

II L'espace affine E_3 (repère $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) écrire l'équation cartésienne du plan défini par le point A $(2,1,3)$ et la droite $(O, \vec{k})$

III Graphique de f :

$f : x \longmapsto f(x) = y = x^3 - 6x^2 + 9x$

en repère orthonormé.

I 1°/

$\cos x + \sin x = 0$

$\cos x = -\sin x$ (1)

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

(1) devient : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

donc : $x = \frac{\pi}{2} + x + k 2\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

ou : $x = -\frac{\pi}{2} - x + k' 2\pi \quad \forall k' \in \mathbb{Z}$

En conclusion : $x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + k 2\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

x figure dans les deux membres ! Relisez-vous ?

2°/

$\cos x - \sin x + 1 = 0$

C'est une équation de la forme $a\cos x + b\sin x = c$

Ici : $\cos x - \sin x = -1$ (1)

On sait (et nous admettons la démonstration connue) que une telle équation peut s'écrire sous la forme :

$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\varphi) = c$

Ici : $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} = \sqrt{a^2+b^2}$

donc (1) devient : $\sqrt{2}\cos(x-\varphi) = -1$ (2)

φ est une mesure à déterminer.

Pour déterminer φ, développons $\sqrt{2}\cos(x-\varphi)$:

$\sqrt{2}\cdot\cos(x-\varphi) = \sqrt{2}(\cos x\cos\varphi - \sin x\cdot\sin\varphi)$

erreur de calcul

$= (\sqrt{2}\cos\varphi)\cos x - (\sqrt{2}\sin\varphi)\sin x$

Par analogie à l'équation (1) :

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

bon principe !

et, par conséquent, ~~cos~~ $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ répond à la question.

(2) devient :

$$\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad\vdash\quad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

Comme $-\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $-\cos\dfrac{\pi}{4} = \cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)$ En effet : $\cos(\pi-x) = -\cos x$

$$-\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

alors :

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3) devient : $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

et donc :

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + k\,2\pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + k\,2\pi$$

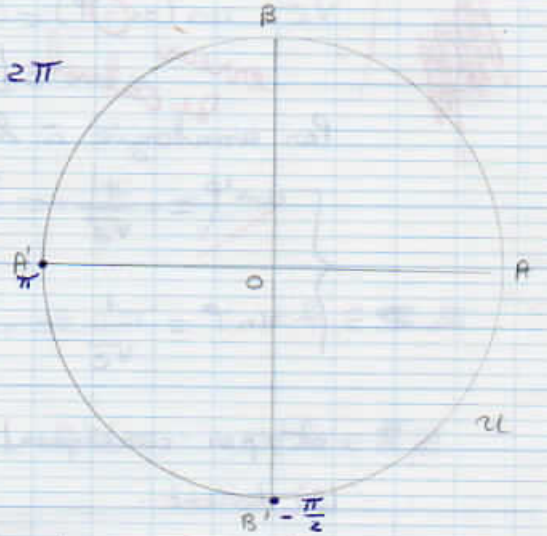
$$\boxed{\begin{array}{c} x = \pi + k\,2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\,2\pi \end{array}}$$

on peut écrire

$x \equiv \pi \quad [2\pi]$

ou

$x \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$



Soit 2 familles de réels π et $-\frac{\pi}{2}$

3°/

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} - \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0 \qquad (1)$$

Bien sur $\operatorname{tg} x$ existe $\vdash$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

et $\operatorname{tg} x \neq 0 \vdash x \neq k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

~~Nous pouvons écrire :~~

~~(1) $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$~~

Posons $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

si $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

c'est-à-dire

si $x \neq \pi + k\,2\pi$

(ce qui est le cas car $x \neq k\pi$)

Comme

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

nous avons :

$$(A) \mapsto \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{1+t^2}{2t} - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{2t} = 0$$

erre !

ce qui devient successivement :

$$\frac{1+t^2}{1-t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + \underbrace{\frac{1+t^2+1-t^2}{2t}}_{\frac{1}{t}} = 0$$

faux

$$(1+t)^2(1-t^2).t - 2t(1-t^2)2t + (1-t^2)(1+t^2) = 0$$

$$(1-t^4)t - 2t^2(1-t^2) + (1-t^4) = 0$$

$$(1-t^4)(t+1) - 2t^2(1-t^2) = 0$$

$$-t^5 + t^4 - 2t^2 + t + 1 = 0$$

$t = 1$ est racine évidente.

$$(t-1)(-t^4 + \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma - t) = 0$$

Je n'ai pas le temps de continuer.

II

L'équation générale des plans passant par A est :

$$a(x-2) + b(y-1) + c(z-3) = 0 \qquad (P)$$

Les coefficients a, b et c se trouvent en connaissant la base $[(\vec{OA}, \vec{OM})$ par exemple, $M \in$ droite $(O, \vec{k})]$ du plan vectoriel associé à (P).

Nous connaissons $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$

$\overrightarrow{OA}\ (2, 1, 3)$

Et $\overrightarrow{OM}$?

Soit $\vec{k}$ est un vecteur directeur de la droite $(O, \vec{k})$.

$\vec{k}\ (0, 0, 1)$.

Prenons par exemple $\vec{k} = \overrightarrow{OM} = \vec{v}$

$\vec{u}\ (2, 1, 3)$

$\vec{v}\ (0, 0, 1)$

Les coefficients a, b et c sont les déterminants suivants :

$\vec{u}$	$\vec{v}$	
2	0	
1	0	$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$
3	1	
2	0	
1	0	$c = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$b = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

donc

$(P) : x - 2 - 2(y - 1) = 0$

$$\boxed{(P) : x - 2y = 0}$$

III

$y = x^3 - 6x^2 + 9x$

a

* $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

* $y' = 3x^2 - 12x + 9$ = factoriser ici.

$\Delta' = 36 - 27 = 9$

$\sqrt{\Delta'} = 3$

$x = \dfrac{6 \pm 3}{3}$, donc $\begin{cases} x' = 1 \\ x'' = 3 \end{cases}$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

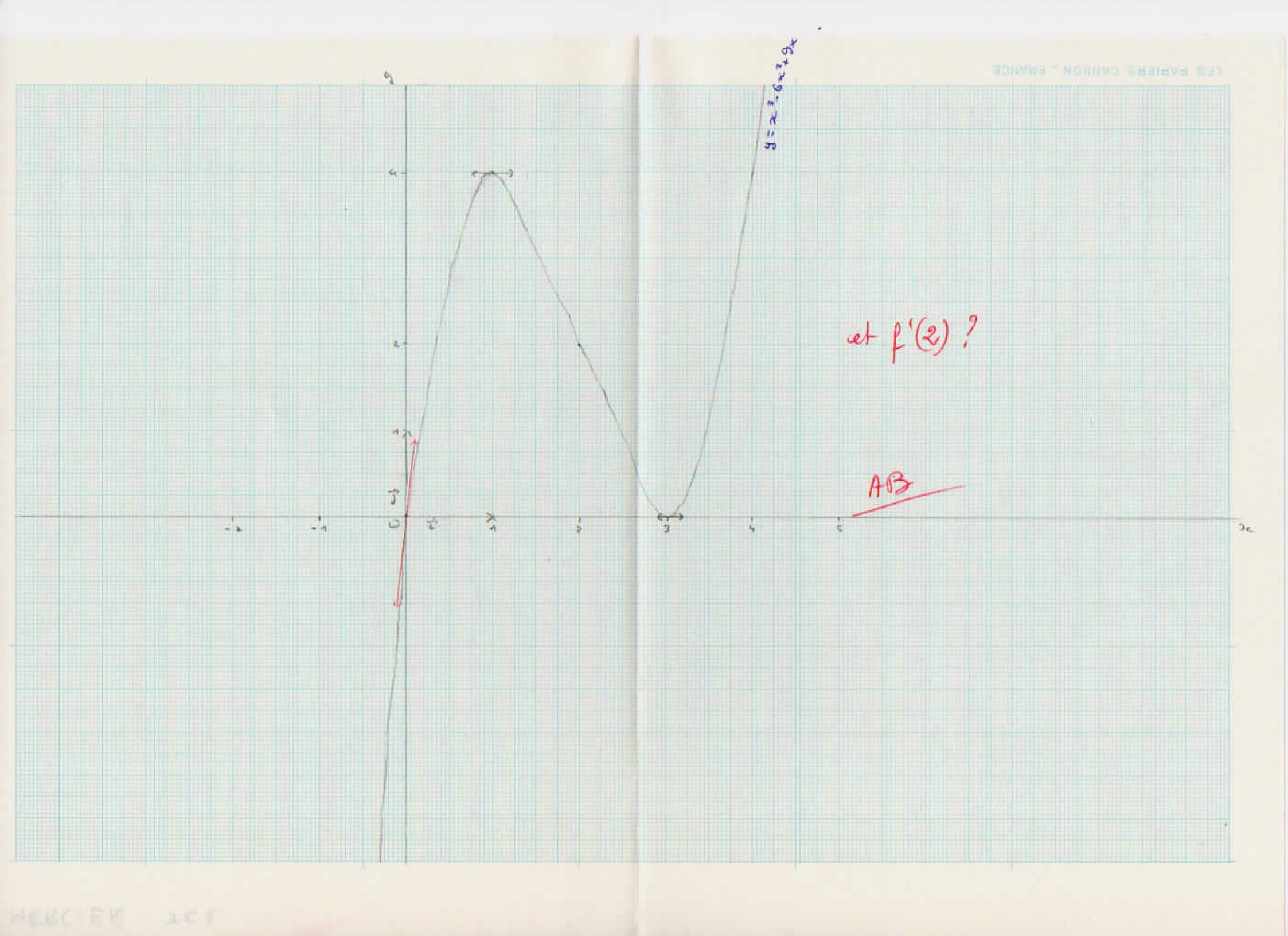
$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

* tableau de variation.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

* coefficients directeurs de tangentes.

En $x = 0$: $f'(0) = 9$


$y = x^3 - 6x^2 + 9x$
et $f'(2)$?
AB

15/20

Mercier Dany-Jack

TC2

Jeudi 26 septembre 1974

Bon travail d'ensemble.
Imperfections de rédaction
Un oubli (III).

Devoir de Mathématique.

Sujet : I Soit une droite (D) d'équations : $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$ en repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Une droite (D') passe par A(1, 1, 0) et un de ses vecteurs directeurs est $\vec{v}'(-4, 14, 10)$. Etudier l'intersection (D) ∩ (D'). Si elles sont coplanaires, on donnera une équation cartésienne de leur plan.

II Mettre l'équation (ou loi horaire) de mouvement rectiligne suivante : $x = 7\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 7\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right) + 4$ sous la forme : $x = 4 + A\sin(\omega t + \varphi)$ A, ω, et φ étant 3 réels à déterminer. Déterminer la vitesse et l'accélération du mobile à l'instant t. A l'instant t = 0, le mouvement est-il accéléré ou retardé ?

III 1°/ On donne le cercle (C) :

$x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$.

Ecrire les équations des droites de coefficient directeur -1, tangentes à (C).

2°/ On donne le cercle (C') : $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$, le point A(1, 3), en repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ecrire les équations des droites passant par A et tangentes au cercle (C').

3°/ Soient les 2 cercles :

(Γ) : $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

(Γ') : $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$

Etudier les positions relatives de (Γ') et (Γ), et préciser leurs éventuels

points d'intersection.

IV Démontrer, en utilisant le raisonnement par récurrence la relation :

$2 . 6 . 10 . \ldots (4n-6)(4n-2) = (n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n$

$n \in \mathbb{N}$ ou à une partie de $\mathbb{N}$ à indiquer.

Réponses

Problème I

1° Intersection $(D) \cap (D')$.

* Equations paramétriques de (D').

$A(1,1,0)$ $\quad \vec{v}'(-4,14,10)$

$\forall M \in (D') : \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{v}' \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}'$ 1°)

Donc :

$$(D') \begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = 1 + 14\lambda \\ z = 10\lambda \end{cases}$$ 2°)

Que représente exactement λ ? Le dire

1ère méthode

Les droites (D') et (D) se couperont si et seulement si le système formé par les équations de (D) est compatible lorsque l'on a remplacé x par $1-4\lambda$, y par $1+14\lambda$, z par 10λ.

Cela donne :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(1-4\lambda) - 2(1+14\lambda) + 4(10\lambda) = 0 \\ (1-4\lambda) + (1+14\lambda) - 10\lambda + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - 2 = 0 \\ 7 = 0 \end{cases}$$ Ce qui est manifestement faux.

λ a disparu ; c'est regrettable ; c'était la seule inconnue. On savait donc ce qu'on cherchait !

Donc, $\nexists \lambda$.

Les droites (D) et (D') ne se coupent pas.

2ème méthode

Les équations cartésiennes de (D') sont :

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{14} = \frac{z}{10}$$

ou encore :

$$\left.\begin{array}{l} 14x - 14 = -4y + 4 \\ 10x - 10 = -4z \end{array}\right\} \vdash \left\{\begin{array}{l} 7x + 2y = 9 \\ 5x + 2z = 5 \end{array}\right\} : (D')$$

X

* Les points de coordonnée (x, y, z) qui appartiendront à l'intersection $(D) \cap (D')$, si ils existent, seront solution du système :

II
$$\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + 4z = 0 \\ x + y - z = -5 \\ 7x + 2y = 9 \\ 5x + 2z = 5 \end{array}\right\} \quad (I)$$

lourd

non au programme

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \\ 5 & 0 \end{matrix} \quad \text{(règle de Sarrus)}$$

$D = 4 + 10 - 14 = 0$

alors $D_x = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & 1 \\ 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{matrix}$

lequel ?

$D_x = -20 + 10 - 18 = -28 \neq 0$ Le système est donc impossible.

(I) impossible $\Rightarrow$ (II) est aussi impossible.

Donc : $\nexists (x, y, z)$ / (II) soit vérifié.

et : $(D) \cap (D') = \emptyset$.

Conclusion

$(D) \cap (D') = \emptyset$. Les droites (D) et (D') sont * soit quelconques

* soit parallèles (au sens strict)

2°) (D) et (D') coplanaires ?

Si oui, $\exists$ plan affine (Q) : $a(x-1) + b(y-1) + cz = 0$

B tel que $\left\{\begin{array}{l} (D) \subset (Q) \\ \text{et} \\ (D') \subset (Q) \end{array}\right.$

* $(D')\ C(Q) \vdash \vec{v}' \in \vec{Q} \vdash -4a + 14b + 10c = 0$

$\vdash -2a + 7b + 5c = 0$

* Quel est un vecteur directeur $\vec{v}_d$ de (D) ?

Si $\vec{v}_z = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, alors : $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

donc $z = x + y$ et $3x - 2y + 4x + 4y = 0$

$7x + 2y = 0$

$x = -\frac{2}{7} y$

donc $z = x + y = -\frac{2}{7} y + y = \frac{5}{7} y$

En posant $y = \alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{v}_\alpha$: $(x, y, z) = \left(-\frac{2}{7}\alpha, \alpha, \frac{5}{7}\alpha\right)$ Vu

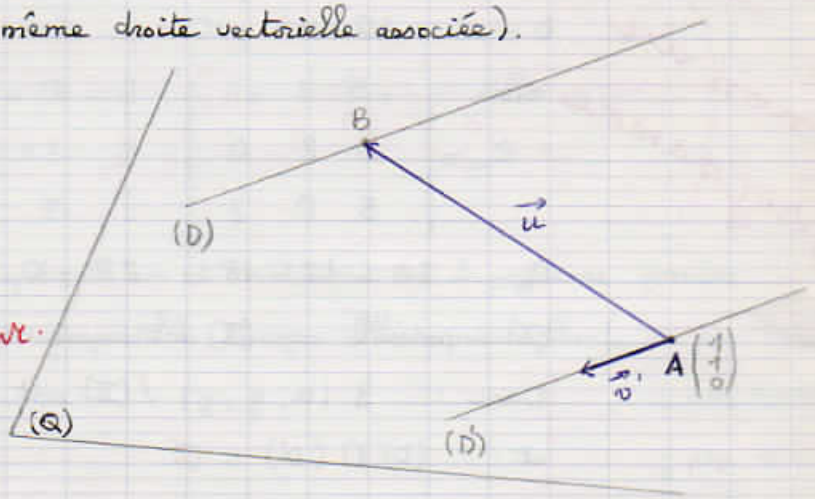
et, par exemple $\vec{v}_7 = \vec{v} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$

Nous constatons que $\vec{v} = \vec{v}'$.

B | Les deux droites (D) et (D') sont donc parallèles puisqu'elles ont même direction (c'est-à-dire même droite vectorielle associée).

Pour déterminer le plan (Q), il nous manque le vecteur $\vec{u}$ impr. non colinéaire à $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ (ni à $\vec{v}$).

un



* Détermination d'un vecteur $\vec{AB} = \vec{u}$, $B \in (D)$.

Faisons $z = 0$ dans les équations cartésiennes de (D) :

$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \longleftarrow -15 - 3y - 2y = 0 \longleftarrow 5y = -15 \\ x + y = -5 \longleftarrow x = -5 - y \end{cases}$

donc $y = -3$ et $x = -5 + 3 = -2$

B $(-2, -3, 0)$

Donc $\vec{AB} = \vec{u} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-2-1)\vec{i} + (-3-1)\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{u}\ (-3, -4, 0)$

* Détermination de Q : $A(1,1,0)$

$\vec{u}(3,4,0)$

$\vec{v}(-2,7,5)$

B

$(\vec{Q})$: $ax + by + cz = 0$

Les coefficients a, b et c s'obtiennent comme il suit :

$\vec{u}$	$\vec{v}$	
3	-2	
4	7	$a = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20$
0	5	$b = -15$
3	-2	$c = 29$
4	7	

donc

(Q) : $20(x-1) - 15(y-1) + 29z = 0$ B

Vu

$$(Q) : 20x - 15y + 29z - 5 = 0$$

Problème II $\quad x = 7\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 7\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right) + 4 = f(t)$

$f(t) = x = 4 + A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (A, \omega, \varphi) \in \mathbb{R}^3$

Posons $\ell = 7\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 7\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$

Tout revient à mettre ℓ sous la forme $\ell' = A\sin(\omega t + \varphi)$

$\ell' = A\cos\varphi \cdot \sin\omega t + A\sin\varphi \cdot \cos\omega t$

Or, ℓ peut s'écrire :

$$\ell = 7\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 7\left(\sin\frac{\pi}{6}t \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\ell = -7\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{6}t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\cos\frac{\pi}{6}t\right] \qquad \text{posons } \omega = \frac{\pi}{6}$$

$$\ell = -\frac{7\sqrt{2}}{2}\sin\omega t - \frac{7(\sqrt{2}-2)}{2}\cos\omega t$$

De l'analogie de ℓ' et ℓ, nous déduisons :

$$I \quad \begin{cases} A \cdot \cos\varphi = -\dfrac{7\sqrt{2}}{2} \\ A \cdot \sin\varphi = -\dfrac{7(\sqrt{2}-2)}{2} \end{cases}$$

En élevant au carré :

$$I \vdash II \qquad II \begin{cases} A^2 \cos^2\varphi = \dfrac{49}{2} \\ A^2 \sin^2\varphi = \dfrac{49(3-2\sqrt{2})}{2} \end{cases}$$

donc :

$$A^2 = \frac{49}{2} + \frac{49}{2}(3-2\sqrt{2})$$

$$= \frac{49}{2}\left[1+3-2\sqrt{2}\right]$$

$$A^2 = \frac{49}{2}(4-2\sqrt{2}) \vdash A^2 = 49(2-\sqrt{2}) \vdash A = \pm 7\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Prenons, par exemple, la valeur positive de A :

$$A = 7\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Alors I devient

$$\begin{cases} 7\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \cos\varphi = -\dfrac{7\sqrt{2}}{2} \\ 7\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sin\varphi = \dfrac{7}{2}(2-\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sin\varphi = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vdash \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} & (<0) \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & (>0) \end{cases}$$

Le calcul de φ à partir de $\operatorname{tg}\varphi$ sera plus simple. En effet :

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

Montrez que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.

$$= \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

Comme $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$, alors $\operatorname{tg}\varphi \simeq -0{,}414$ (1)

Comme $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} \simeq 0{,}414$

(1) $\vdash$ $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$?

$$\vdash \begin{cases} \varphi_1 = -\dfrac{\pi}{8} + k2\pi \vdash \varphi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \varphi_2 = \pi - \dfrac{\pi}{8} + k2\pi \vdash \varphi_2 = \dfrac{7\pi}{8} + k2\pi \end{cases}$$

Mais φ est aussi défini par son cosinus.

Comme $\cos\varphi < 0$, (et $\sin\varphi > 0$), on ne conservera que la valeur $\varphi = \varphi_2$

Donc : $\varphi = \dfrac{7\pi}{8} + k2\pi$

En conclusion :

$$x = 4 + 7\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right)$$

Après des écritures sérieuses, vous vous laissez aller à une écriture non sûre !

2°/

Nous avons préféré faire l'étude du mouvement rectiligne vibratoire d'équation horaire $x = f(t) = 4 + 7\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right)$ (cf. 1-question) dans son ensemble. L'étude du mouvement à l'instant $t=0$ sera donc incorporée à celle du mouvement tout entier.

* Vitesse instantanée du mobile M à l'instant t.

$$v = \frac{dx}{dt} = 7\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right)$$

un seul (n)

* Accélération instantanée.

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -7\sqrt{2-\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right)$$

donc $\gamma = -\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 (x-4)$: (2)

* Amplitude du mouvement, période de $f(t) = x$.

L'amplitude a pour valeur : $|7\sqrt{2-\sqrt{2}}| = 7\sqrt{2-\sqrt{2}} \simeq 5,32$

$x = f(t)$ est périodique, et de période T telle que : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} \cdot 6 = 12$

Donc $T = 12$ unités de temps.

* Etude du mouvement sur d'une période : $t \in [0, 12]$

a) $\gamma = -7\sqrt{2-\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right)$

L'accélération γ s'annule si et seulement si

$$\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8} = k\pi$$

$$8t + 42 = 48k$$

$$4t = 24k - 21 \quad \vdash \text{ si } k=1, \gamma \text{ s'annule pour } t = \frac{24-21}{4} = \frac{3}{4}$$

et : si $k=2$, γ s'annule pour $t = \frac{48-21}{4} = \frac{27}{4}$

Or, γ est du signe de $-\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right)$, ~~dans~~ si $t \in [0, 12]$

Si $t \leq \frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8} \leq \pi \vdash \gamma \leq 0$

Si $\frac{3}{4} \leq t \leq \frac{27}{4}$, $\pi \leq \frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8} \leq 2\pi \vdash \gamma \geq 0$

Si $\frac{27}{4} \leq t \leq 12$, $2\pi \leq \frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8} < 3\pi \vdash \gamma < 0$

b) $v = 7\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right)$

La vitesse v s'annule lorsque $t \in [0, 12]$, si et seulement si :

$$\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$8t + 42 = 24 + 48k$$
$$4t + 21 = 12 + 24k$$
$$4t = 24k - 9 \quad \vdash \text{ si } k = 1, \text{ } v \text{ s'annule pour } t = \frac{24-9}{4} = \frac{15}{4}$$

et, si $k = 2$, pour $t = \frac{48-9}{4} = \frac{39}{4}$

D'autre part, v a le signe de $\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right)$. Donc :

Si $0 \leq t \leq \frac{15}{4}$ $\vdash$ $\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8} \leq \frac{3\pi}{2}$ $\vdash$ $v \leq 0$

Si $\frac{15}{4} \leq t \leq \frac{39}{4}$ $\vdash$ $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8} \leq \frac{5\pi}{2}$ $\vdash$ $v \geq 0$

Si $\frac{39}{4} \leq t \leq 12$ $\vdash$ $\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8} < \frac{7\pi}{2}$ $\vdash$ $v < 0$

L'étude du mouvement se réduit au tableau suivant :

t	0		$\frac{3}{4}$		$\frac{15}{4}$		$\frac{27}{4}$		$\frac{39}{4}$		12
Y	$-\frac{5}{9}$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	$-\frac{5}{9}$
v	$-2,5$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	$-2,5$
mouvement de M ~~et $x = f(t)$~~	rétrograde accéléré.		rétrograde retardé.		direct accéléré.		direct retardé.		rétrograde accéléré.		
x mouvement	$6,03$	$\searrow$	4	$\searrow$	$-1,32$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$9,32$	$\searrow$	

En $t = 0$, le mouvement est donc rétrograde accéléré, ~~l'accélération~~

En effet :

* Etude au point $t = 0$.

a) $x = 4 + \underbrace{7\sqrt{2-\sqrt{2}}}_{\simeq 5,32} \cdot \sin\frac{7\pi}{8}$

Comme :

$$\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} = \sin 22°30' = 0,382$$
$$\cos\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8} = -\cos 22°30' = -0,924$$

donc :

$$x \simeq 4 + 7 \cdot 0,76 \cdot 0,382 \quad \vdash \quad x \simeq 4 + 2,03 \quad \vdash \quad x \simeq 6,03$$

b) vitesse pour $t = 0$

$v = 7 . 0,76 . \frac{\pi}{6} (-0,924)$

$v \simeq -7 . 0,38 . \pi . 0,308$

$v \simeq -2,66 . 0,94$

$v \simeq -2,5$

c) accélération pour $t = 0$

$\gamma = -\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 (x - 4)$

$\gamma \simeq -\frac{\pi^2}{36} . 2,03 \vdash \gamma \simeq -\frac{9,87 . 2,03}{36} \vdash \gamma \simeq -\frac{5}{9}$

d) En conclusion,

Pour $t = 0$:

$x \simeq 6,03$

$v \simeq -2,5$

$\gamma \simeq -\frac{5}{9}$

A l'instant $t = 0$, le mouvement est accéléré.

* Valeurs de $x = f(t) = 4 + 7\sqrt{2-\sqrt{2}} . \sin\left(\frac{\pi}{6} t + \frac{7\pi}{8}\right)$

a) pour $t = \frac{3}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6} . \frac{3}{4} + \frac{7\pi}{8}\right) = \sin \pi = 0$

donc $x = 4$ $\qquad f\left(\frac{3}{4}\right) = 4$

b) pour $t = \frac{27}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6} . \frac{27}{4} + \frac{7\pi}{8}\right) = \sin 2\pi = 0 \vdash f\left(\frac{27}{4}\right) = 4$

c) pour $t = \frac{15}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6} . \frac{15}{4} + \frac{7\pi}{8}\right) = \sin \frac{12\pi}{8} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

donc $x \simeq 4 - 5,32 \vdash f\left(\frac{15}{4}\right) \simeq -1,32$

d) pour $t = \frac{39}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6} . \frac{39}{4} + \frac{7\pi}{8}\right) = \sin \frac{20\pi}{8} = \sin \frac{5\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

donc $f\left(\frac{39}{4}\right) \simeq 9,32 \quad (= 4 + 5,32)$

* $t \in [0, 12]$, cherchons les valeurs de t pour lesquelles $f(t) = 0$.

$$0 \simeq 4 + 5,32 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{4}{5,32}$$

$$\simeq -0,751$$

$$\simeq \sin -48°30'$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right) \simeq \sin -\frac{97\pi}{360}$$

De deux choses l'une ou l'autre :

a) $\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8} = -\frac{97\pi}{360} + k\,2\pi$

$60t + 315 = -97 + 2.k.360$

$30t = -206 + 360k$

$15t = -103 + 180k$

Si $k = 1$, $t = \frac{77}{15} \simeq 5,1$ donc $\boxed{f\left(\frac{77}{15}\right) = 0}$.

b) $\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8} = \pi + \frac{97\pi}{360} + k\,2\pi$

$60t + 315 = 360 + 97 + 2k.360$

$60t = 142 + 2.360.k$

$30t = 71 + 360k$

Si $k = 0$, $t = \frac{71}{30} \simeq 2,4$ donc $\boxed{f\left(\frac{71}{30}\right) = 0}$.

*Toutes ces indications permettent la construction de la figure (1). Le diagramme des espace est une sinusoïde. La figure est la même pour toute autre période considérée.

mal expr.

Problème III 1°/

Les droites de coefficients directeur -1 ont pour équation générale :

$y = -x + b \qquad b \in \mathbb{R}$

Nous allons chercher les intersection points d'intersection, s'ils existent, de

la droite D_b : $y = -x + b$ et du cercle (C).

Nous dirons que l'équation du second degré en x obtenue aura une solution double, si, du moins, par hyp. la droite est tangente à C. Réciproque vraie ?

AB

Que manque-t-il dans votre rédaction?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0 \\ y = -x + b \end{cases}$$

devient : $x^2 + (b-x)^2 - 8x + 4b - 4x - 5 = 0$

$x^2 + b^2 + x^2 - 2bx - 12x + 4b - 5 = 0$

$2x^2 - (12 + 2b)x + b^2 + 4b - 5 = 0$

$2x^2 - 2(6 + b)x + (b^2 + 4b - 5) = 0$

avec $\Delta' = 0$ ⟺ $(6 + b)^2 - 2(b^2 + 4b - 5) = 0$

$36 + b^2 + 12b - 2b^2 - 8b + 10 = 0$

$-b^2 + 4b + 46 = 0$

$\delta' = 4 + 46 = 50$

$\sqrt{\delta'} = 5\sqrt{2}$ donc $b = \dfrac{-2 \pm 5\sqrt{2}}{-1}$

ou : $b = 2 \pm 5\sqrt{2}$ posons $\begin{cases} b_1 = 2 + 5\sqrt{2} \\ b_2 = 2 - 5\sqrt{2} \end{cases}$

Nous trouvons 2 droites :

D_{b_1} : $y = -x + 2 + 5\sqrt{2}$

D_{b_2} : $y = -x + 2 - 5\sqrt{2}$

2°/

(C') : $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

A (1, 3) repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

J'abord en montrer l'existence

Nous allons déterminer les tangentes au cercle (C') passant par le point A de la façon suivante :

Nous allons exprimer que le carré de la distance du centre du cercle ω à la droite (D) que l'on cherche, est égal au carré du rayon R du cercle (C').

* L'équation de (C') peut s'écrire :

$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \dfrac{2^2 + 4^2}{4} - 1$

$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ Donc $R = 2$; $\omega(-1, -2)$

* L'équation générale des droites passant par $A(1,3)$ est :

~~$y - 3 = m(x-1)$~~ ~~$(m \in \mathbb{R})$~~

~~(D) :~~ ~~$y = mx + 3 - m$~~

$ax + by + c = 0 \qquad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$A \in (D) \vdash a + 3b + c = 0 \vdash c = -a - 3b$

donc :

$(D) : ax + by - a - 3b = 0 \qquad (1)$

Premier cas : Si $b \neq 0$, posons $\frac{a}{b} = k$; $k \in \mathbb{R}$. Alors :

$(D) : kx + y - k - 3 = 0$

non explicitement au programme !

On sait que la distance $d(M,(D))$ d'un point $M(x_0, y_0)$ à une droite (D) : $ax + by + c = 0$ dans un plan affine est :

$$d(M,(D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ici : $\omega(-1,-2)$

$$d(\omega,(D)) = \frac{|-k - 2 - k - 3|}{\sqrt{k^2+1}}$$

et, en élevant au carré, et en égalant à $R^2 = 4$

$$\frac{(2k+5)^2}{k^2+1} = 4$$

$$4k^2 + 25 + 20k = 4k^2 + 4 \vdash k = -\frac{21}{20}$$

donc :

$$(D_1) : -\frac{21}{20}x + y + \frac{21}{20} - 3 = 0$$

ou

$$\boxed{(D_1) : 21x - 20y + 39 = 0}$$

Second cas : Si $b = 0$, (1) devient :

$ax - a = 0 \vdash a(x-1) = 0$ $\quad a \neq 0$ pour que $ax + c = 0$ puisse être l'équation d'une droite.

$\vdash x = 1$

Donc : $\boxed{D_2 : x = 1}$ (cf. figure 2)

Attention !

Ou montrez vous que cette droite est tangente au cercle ?

3°/

Positions relatives de (T) et (T')

* (T) : $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ centre du cercle
$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$ $\omega(-1,-2)$ rayon $R = 2$

* (T') : $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{4+4}{4} + 6$

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ donc : ω' (centre de T') : $(1,-1)$

rayon $R' = \sqrt{10}$

$R' \simeq 3,162$

* distance (ω, ω') ?

$\vec{\omega\omega'} : (2, 1)$

donc, le repère étant orthonormé : $\|\vec{\omega\omega'}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Donc $d(\omega, \omega') = \sqrt{5} = d$

Vu

* Comparons $d = \sqrt{5}$ (>0) et $R + R' = 2 + \sqrt{10}$ (>0)

$R + R' > d$ car $(R+R')^2 > d^2$ puisque $4 + 10 + 4\sqrt{10} > 5$

oui Vu

Par conséquent, les 2 cercles sont sécants en 2 points distincts.

D'autre part (cf. fin du devoir.)

$(T) \cap (T')$

Tout revient à résoudre le système en x et y :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0 & (2) \end{cases} \Big\} (I)$$

$$4x + 2y + 7 = 0 \quad (3)$$

Résoudre (I) revient à résoudre (II) :

II $\begin{cases} 4x + 2y + 7 = 0 \leftarrow y = -2x - \frac{7}{2} \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ Vu

donc : $x^2 + \left(2x + \frac{7}{2}\right)^2 - 2x + 2\left(-2x - \frac{7}{2}\right) - 6 = 0$

$x^2 + 4x^2 + \frac{49}{4} + 14x - 2x - 4x - 7 - 6 = 0$

$5x^2 + 10x - 2x + \frac{49}{4} - 13 = 0$

$5x^2 + 8x - \frac{3}{4} = 0$

$20x^2 + 32x - 3 = 0$

$\Delta' = 256 + 60 = 316$

$\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{79}$

donc $x = \dfrac{-16 \pm 2\sqrt{79}}{20} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{79}}{10}$

$x_1 = \dfrac{-8-\sqrt{79}}{10}$; $x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{79}}{10}$

Les valeurs correspondantes de y sont :

$y_1 = \dfrac{8+\sqrt{79}}{5} - \dfrac{7}{2} = \dfrac{2(8+\sqrt{79}) - 35}{10} = \dfrac{2\sqrt{79} - 19}{10}$

$y_2 = \dfrac{8-\sqrt{79}}{5} - \dfrac{7}{2} = \dfrac{16 - 2\sqrt{79} - 35}{10} = \dfrac{-2\sqrt{79} - 19}{10}$

En conclusion :

Les points d'intersection sont :

Vu

$M_1\left(-\dfrac{8+\sqrt{79}}{10} \; , \; \dfrac{2\sqrt{79}-19}{10}\right)$

et $M_2\left(\dfrac{-8+\sqrt{79}}{10} \; , \; -\dfrac{19+\sqrt{79}}{10}\right)$

Exercice IV

$\mathcal{S}(n)$: $2.6.10.\ldots.(4n-6)(4n-2) = (n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n$.

Pour $n=0$, la relation n'est pas vraie car $4n-2 = -2$, ce qui rend impossible la détermination du premier membre.

Les n devront être choisis tels que, dans la "suite" finie de nombres :

$2 \; , \; 6 \; , \; 10 \; , \; \ldots \; , \; 4n-2$.

(suite arithmétique de raison $r = 4$), le plus grand nombre, c'est-à-dire $(4n-2)$, soit supérieur ou égal au plus petit, c'est-à-dire 2.

Donc $2 \leqslant 4n-2 \iff n \geqslant 1$.

Rédigez !

$\mathcal{S}(n)$ mais si $n \in [1, +\infty[\cap \mathbb{N}$?

On vous demande de chercher si $\mathcal{S}(n)$ est exacte pour tout $n \in [1, +\infty[\cap \mathbb{N}$.

* $\mathcal{S}(1)$ est vraie car : $2 = (1+1)$

* $\mathcal{P}(n) \vdash \mathcal{P}(n+1)$?

Vu || Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Nous allons démontrer alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Si, Pour n ~~=~~, ~~l'équation devient~~ impr est vraie : , alors

$2.6.10\ldots(4n-6)(4n-2) = (n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\,2n = A$

Pour $n+1$,

(1) $2.6\ldots(4n-2)(4n+2) = (n+2)(n+3)\ldots(2n+1)\,2(n+1)$ est vraie ?

mal rédigée

(1) peut s'écrire :

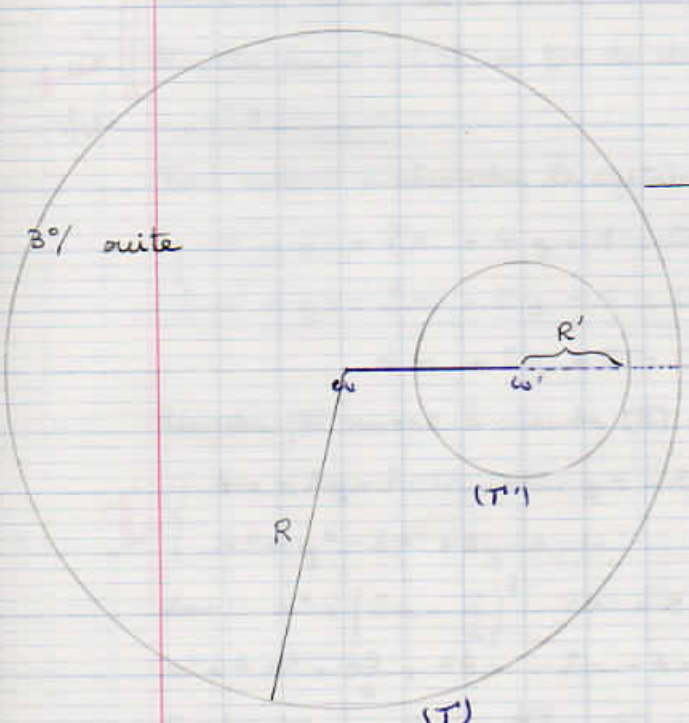
$$\underbrace{2.6\ldots(4n-2)}_{A}\,(4n+2) = \underbrace{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}_{A}\,(2n+1).2$$

donc (1) $\vdash$ $\underbrace{4n+2 = 2(2n+1)}_{\text{exact. Donc (1) est exact.}}$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

La propriété $\mathcal{P}(n)$ est générale sur $[-1,+\infty[\,\cap\,\mathbb{N}$

III 3°/ suite



Dans ce cas, Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Soit d la distance $\omega\omega'$.

Nous avons :

$R = d + R' + \alpha$

donc $R - R' = d + \alpha$

donc si $d < R - R'$, le cercle (T') est à l'intérieur de l'autre cercle.

Or, ici, $d = \sqrt{5}$ et $R - R' = 2 - \sqrt{10}$

$\simeq 2 - 3{,}162$

$\simeq -1{,}162$

et donc $d > R - R'$

car $\sqrt{5} > -1{,}162$.

B

donc (T') n'est pas à l'intérieur de (T).

En conclusion $R - R' < d < R + R'$

Les cercles (T) et (T') sont donc sécants en 2 points distincts.

Vu

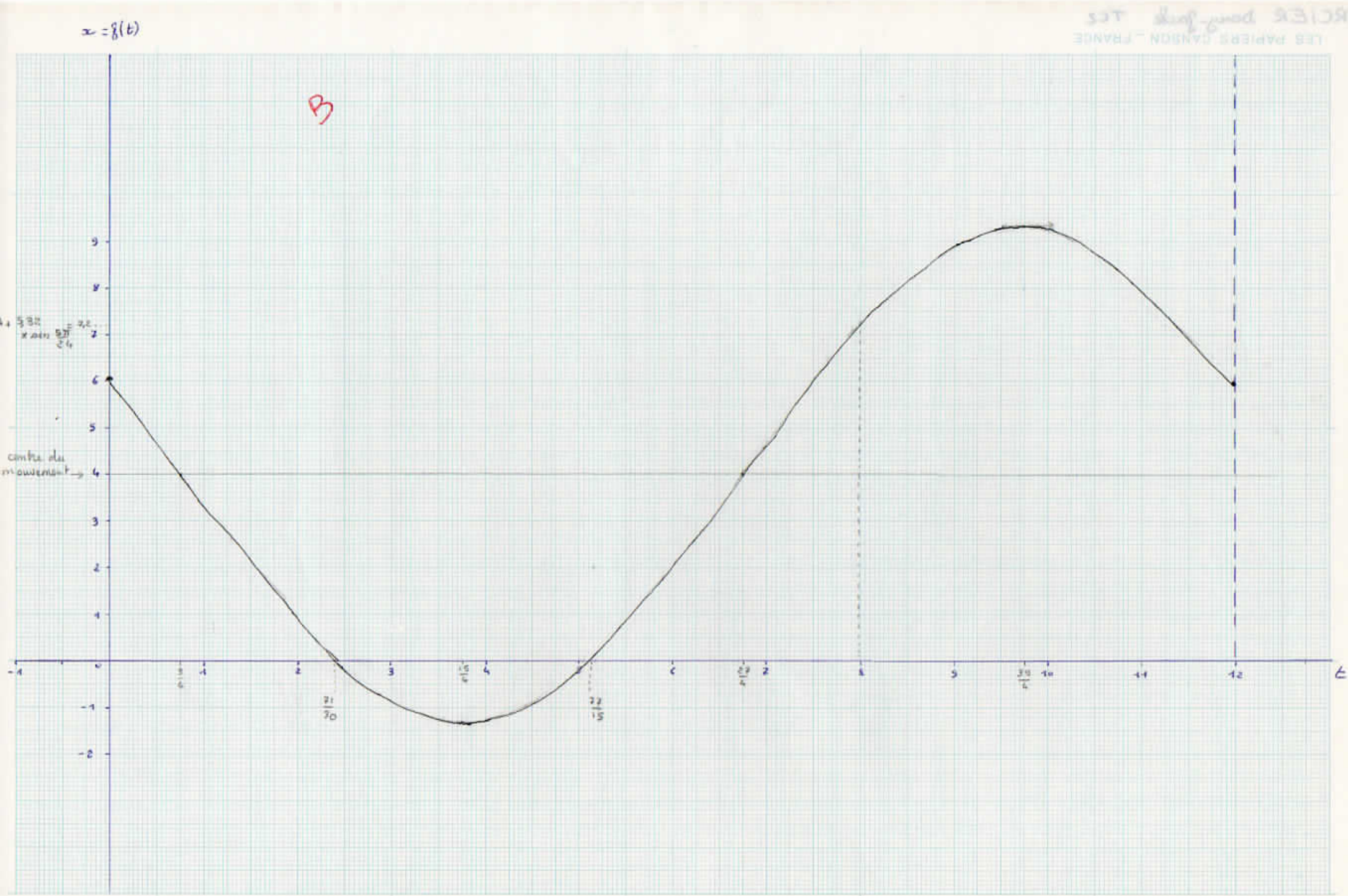
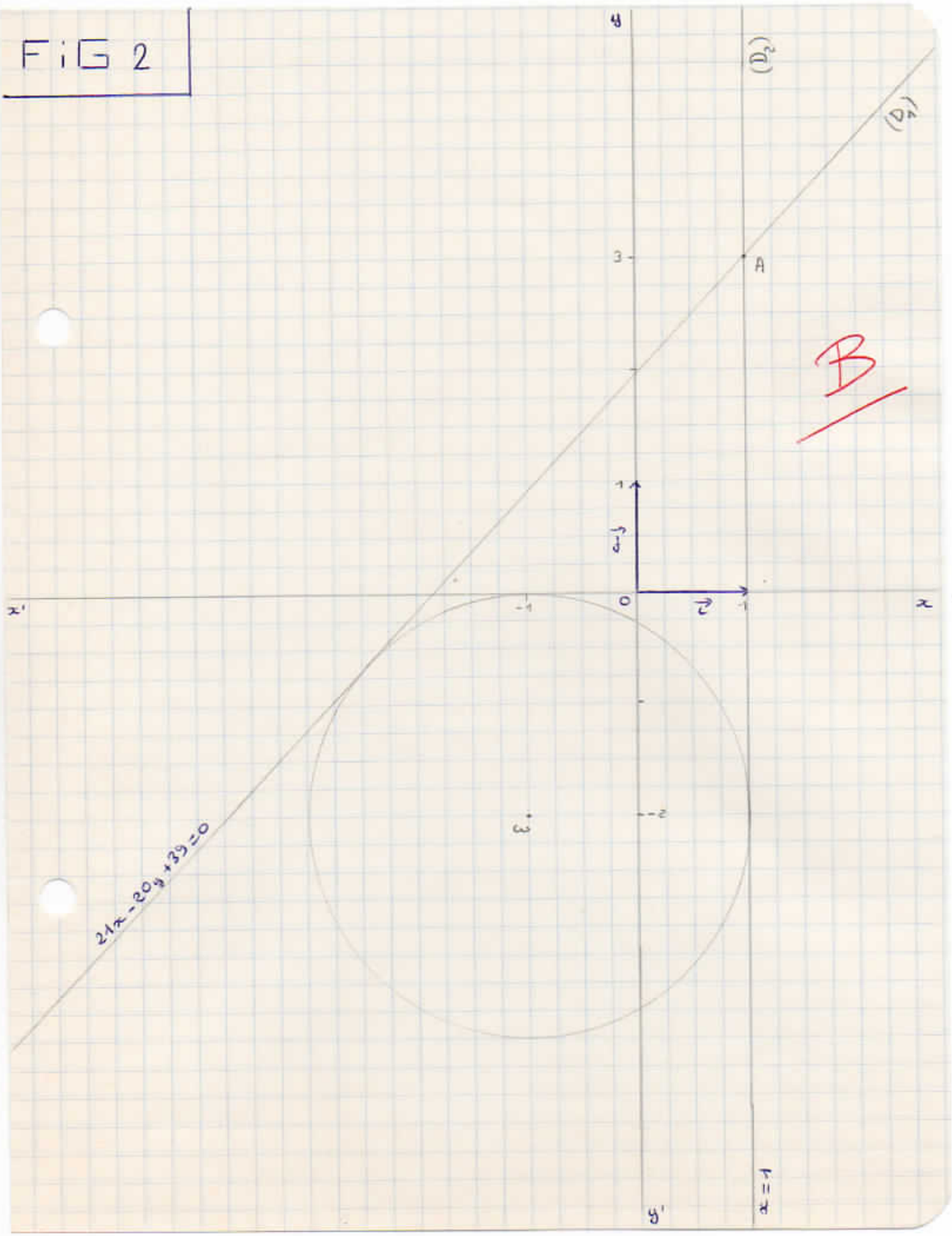


figure (1)

diagramme des espaces de l'équation horaire $x_B = 4 + 7\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{7\pi}{8}\right)$
pour une période de la fonction.

$t \in [0, 12]$

FIG 2



Mercier Dany-Jack

TC2

Jeudi 3 octobre 1974

16/20 Bien - Net - Quelques petits "défauts" -

Devoir de Mathématique.

Sujet

I Un plan (Π) passe par le point $P(1,2,-3)$ dans un repère cartésien orthonormé. Les droites (D) : $x-1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ et (D') : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = z$ sont parallèles à (Π). Quelle est l'équation de (Π) ?
En déduire les équations des sphères de rayon R donné, tangentes en P au plan (Π).

II Un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les équations de 2 droites sont:

(D) : $\frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z-3}{4}$ et $(D') \begin{cases} x+y+z = 2 \\ x+y-z = 4 \end{cases}$

Un point A a pour coordonnées $A(1,2,3)$. Existe-t-il une droite (Δ) passant par A et rencontrant (D) et (D') ? On donnera une représentation paramétrique de (Δ).

III A tout réel positif, on fait correspondre par la fonction E, le nombre $y = E(x)$ défini comme il suit :
$n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [n, n+1[$, $E(x) = n$
Si $x = n+1$, $E(x) = n+1$.
Cette application est une application de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble que l'on déterminera. Tracer son graphe en repère orthonormé.
Toujours pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f : x \longmapsto z = f(x) = x - E(x)$.
Quel est l'ensemble des valeurs prises par z ? Tracer le graphe de f.

IV On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées 2-2 du type $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

* On sait que $(\mathcal{M}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Rappelez cette structure.

* On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ et $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On appelle M' l'ensemble des matrices du type $\mu = aI + bA$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

1°/ Montrer que pour que 2 éléments μ et μ' de M' soient égaux, il faut et il suffit que $a = a'$ et $b = b'$.

2°/ Montrer que M' a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3°/ Soit f: $M' \longrightarrow M'$

$$\mu = aI + bA \longmapsto f(\mu) = aI - bA$$

Montrer que f est un automorphisme involutif de M'.

* M'' est le sous-ensemble de M' dont les éléments sont les matrices formées avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. M'' a-t-il une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Solutions proposées

I Les équations de (D) et (D') étant respectivement :

$$\begin{cases} x - 1 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{3} \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \beta \end{cases}$$

2 vecteurs directeurs du plan vectoriel $\vec{\pi}$ associé au plan (π) seront :

$\vec{u}\,(1, 2, 3)$

$\vec{v}\,(2, 3, 1)$

Si $a(x-1) + b(y-2) + c(z+3) = 0$ est l'équation générale des plans passant par $P(1, 2, -3)$, l'équation de (π) s'obtiendra en prenant pour coefficients a, b et c , les nombres :

$\vec{u}$	$\vec{v}$	
1	2	
2	3	$a = -7$
3	1	
1	2	$b = 5$
2	3	$c = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

B

net

Donc (Π) : $-7(x-1) + 5(y-2) - 1(z+3) = 0$

$$(\Pi) : \quad 7x - 5y + z + 6 = 0$$

2%

Equation des sphères de rayon R donné et tangentes en P au plan (Π).

(Π) : $7x - 5y + z + 6 = 0$

Soit (Δ) la droite perpendiculaire au plan (P) et passant par P. Le centre ω de la sphère de rayon R et tangente en P à (Π) appartiendra nécessairement à (Δ). Donc $\omega \in (\Delta)$.

(Δ) ? $\quad \vec{\Delta} \not/ \quad \vec{n} \in \vec{\Delta} \quad : \quad \vec{n}(7, -5, 1)$

Donc :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 7\lambda \\ y = +2 - 5\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Chercher l'équation de la sphère (S) revient à chercher l'ensemble des positions du point $M(x,y,z)$ / $R^2 = \overrightarrow{\omega M}^2$ (1)

Or, P est un de ces points M.

Donc : $R^2 = \overrightarrow{\omega P}^2$

Comme $\overrightarrow{\omega P}(1-1-7\lambda \ , \ 2-2+5\lambda \ , \ -3+3-\lambda)$ $\quad (\exists \lambda \in \mathbb{R})$

$\overrightarrow{\omega P}(-7\lambda \ , \ +5\lambda \ , \ -\lambda)$ $\quad \lambda$ est alors fixé.

Alors : $R^2 = 49\lambda^2 + 25\lambda^2 + \lambda^2$

$R^2 = 75\lambda^2 \quad \vdash \quad \lambda = \pm \dfrac{R}{\sqrt{75}}$

A chaque valeur donnée de R correspondra 2 valeurs distinctes (sauf si $R=0$, dans ce cas la sphère (S) se limite au point P) telles que $\lambda = \pm \dfrac{R}{\sqrt{75}}$.

Revenons à (1). Nous avons :

$$R^2 = (x-1-7\lambda)^2 + (y-2+5\lambda)^2 + (z+3-\lambda)^2 = 75\lambda^2$$

Ce qui peut s'écrire :

$x^2 + 1 + 49\lambda^2 - 14\lambda x - 2x + 14\lambda + y^2 + 4 + 25\lambda^2 - 4y + 10\lambda y +$
$+ z^2 - 20\lambda + 9 + \lambda^2 + 6z - 2\lambda z - 6\lambda = 75\lambda^2$

$(S)\quad x^2 + y^2 + z^2 - 2(7\lambda+1)x + 2(5\lambda-2)y + 2(3-\lambda)z + 14 - 12\lambda = 0$

R donné ⟼ deux λ donnés. En effet : $\lambda = \pm \frac{R}{\sqrt{75}} = \varepsilon \frac{R}{\sqrt{75}}$

avec $\varepsilon = \pm 1$.

Les équations de (S) et (S') s'écrivent :

$$x^2+y^2+z^2 - 2\left(\frac{7\varepsilon R}{\sqrt{75}} + 1\right)x + 2\left(\frac{5\varepsilon R}{\sqrt{75}} - 2\right)y + 2\left(3 - \varepsilon\frac{R}{\sqrt{75}}\right) + 14 - \frac{12\varepsilon R}{\sqrt{75}} = 0$$

avec $\varepsilon = \pm 1$

II

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(D') : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

Posons $y = \mu$ $\forall \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + z = 2 - \mu \\ x - z = 4 - \mu \end{cases}$$

$$2x = 6 - 2\mu \longmapsto x = 3 - \mu$$

et $z = x - 4 + \mu$

$z = -1$

donc $$(D') \begin{cases} x = 3 - \mu \\ y = \mu \\ z = -1 \end{cases}$$

s'il existe une

Il faut chercher la droite passant par A (1, 2, 3) et rencontrant (D) et (D').

Soit M le point d'intersection de (Δ) et de (D). (λ est fixé)

" M' " " (Δ) et de (D'). (μ est fixé).

En écrivant que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, nous obtiendrons un système de 3 équations à 3 inconnues. En effet :

Soit $k \in \mathbb{R}$ / $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$

Tout revient à chercher k, λ et μ tels que :

TBII

$$\begin{cases} 2-\mu = k(2\lambda) \\ \mu - 2 = k(\lambda - 1) \\ -4 = k(4\lambda) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2-\mu = 2k\lambda & (1) \\ \mu - 2 = k\lambda - k & (2) \\ -1 = k\lambda & (3) \end{cases}$$

(3) dans (1) et (2) :

(1) $\vdash 2-\mu = -2 \vdash \mu = 4$

(2) $\vdash \mu - 2 = -1 - k \vdash \mu - 1 = -k \vdash k = 1 - 4 = -3$

donc $\lambda = -\frac{1}{k} = \frac{1}{3}$ et : $\overrightarrow{AM'} = -3\overrightarrow{AM}$

$M\begin{pmatrix} 1+\frac{2}{3} \\ 1+\frac{1}{3} \\ 3+\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ ou $M\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de (Δ). $\vec{u}:\begin{pmatrix} \frac{5}{3}-1 \\ \frac{4}{3}-2 \\ \frac{13}{3}-3 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM'}$ aussi et ses coord. sont plus "jolies"

prenons $\vec{u'} = \frac{2}{3}\vec{u}$.

erreur ; vous avez choisi $\vec{u'} = \frac{3}{2}\vec{u}$

Donc,

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

III

1°/ $\mathbb{R}_+$

$E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{N}$ non ! inutile

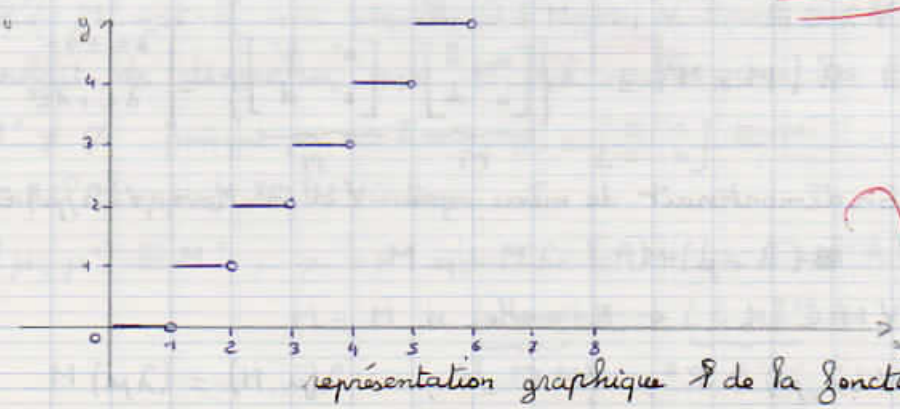
$\forall x \in [n, n+1[\subset \mathbb{R} \longmapsto n$

Non ! c'est vous qui devez préciser pourquoi

Par hypothèse, $\exists n / \forall x \in \mathbb{R}_+, x \in [n, n+1[$

l'ensemble des valeurs de la fonction $E(x)$ sera l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

en entier ; pourquoi ? insistez



Vu

représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction $y = E(x)$.

E

2°/

$f : x \in \mathbb{R}_+ , \longmapsto z = f(x) = x - E(x)$

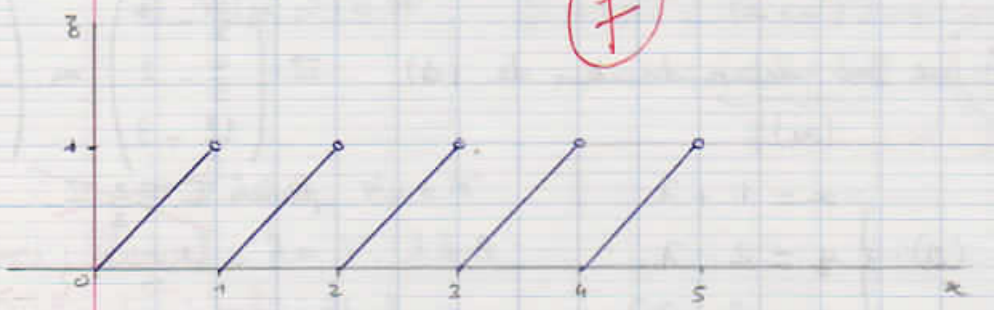
Si $x \in [n, n+1[$, $z = f(x) = x - n$: c'est une fonction affine sur l'intervalle $[n, n+1[$

Nous voyons que dans le cas où $x \in [n, n+1[$, nous avons nécessairement : $z < 1$. En effet, si $z \geqslant 1 \longmapsto x - n \geqslant 1$

$\longmapsto x \geqslant n+1$ ce qui est contraire à l'hypothèse $x \in [n, n+1[$

f est donc une application de $\mathbb{R}_+$ vers $[0, 1[$.

Représentation graphique de f.



IV

Structure d'espace vectoriel de $(\mathcal{M}, +, .)$

a) La loi + est interne et partout définie dans $\mathcal{M}$.

b) Commutativité de + : oui, car + est commutative dans $\mathbb{R}$.

c) Associativité de + : oui, car + est associative dans $\mathbb{R}$.

d) L'élément neutre de $\mathcal{M}$ pour la loi + est la matrice nulle $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

e) Chaque matrice $M \in \mathcal{M}$ admet une matrice opposée $M' = -M$.

f) La loi . est externe et partout définie.

g) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (M, M') \in \mathcal{M}$,

h) $\lambda (M + M') = \lambda \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{M} + \underbrace{\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}}_{M'} \right\} = \begin{bmatrix} \lambda a + \lambda a' & \lambda b + \lambda b' \\ \lambda c + \lambda c' & \lambda d + \lambda d' \end{bmatrix} = \lambda M + \lambda M'$

h) On démontrerait de même que $\forall M \in \mathcal{M}$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$:

$(\lambda + \mu) M = \lambda M + \mu M$

i) $\forall M \in \mathcal{M}$ $1 . M = M$

j) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall M \in \mathcal{M}$, $\lambda(\mu . M) = (\lambda \mu) . M$

1°/

$\mu = \mu' \longmapsto a = a'$ et $b = b'$?

$\mu = aI + bA = \begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a \\ -a & b-a \end{bmatrix}$

$\mu' = a'I + b'A = \begin{bmatrix} a'+b' & a' \\ -a' & b'-a' \end{bmatrix}$

$\mu = \mu' \longmapsto \begin{cases} a+b = a'+b' \\ -a = -a' \\ a = a' \\ b-a = b'-a' \end{cases} \longmapsto \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

barrez nettement ; c'est préférable.

Donc μ est décomposable d'une façon unique en fonction des matrices I et A. (I

1°/

$\mu = \mu' \longmapsto a = a'$ et $b = b'$?

$\mu = aI + bA = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b \\ -b & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{bmatrix}$

$\mu' = a'I + b'A = \begin{bmatrix} a'+b' & b' \\ -b' & a'-b' \end{bmatrix}$

$\mu = \mu' \longmapsto \begin{cases} a+b = a'+b' \\ -b = -b' \\ b = b' \\ a-b = a'-b' \end{cases} \longmapsto a = a'$ et $b = b'$

Donc μ est décomposable d'une façon unique en fonction d'une combinaison linéaire des 2 matrices I et A.

(I, A) : base de M'.

TB !!

2°/ M' a-t-il une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Il suffit de démontrer que M', non vide est stable pour les 2 lois + et . :

* $M' \neq \emptyset$ puisque si $a = b = 0$, $\mu_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M'$

B

* Stabilité pour la loi interne :

$\forall (\mu, \mu') \in M'$, $\mu + \mu' = (aI + bA) + (a'I + b'A)$

$= \underbrace{(a+a')}_{a''} I + \underbrace{(b+b')}_{b''} A$ donc $\mu + \mu' \in M'$

* Stabilité pour la loi externe.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\forall \mu \in M'$ $\quad \lambda\mu' = \underbrace{\lambda a}_{a'} I + \underbrace{\lambda b}_{b'} A \in M'$

M' est bien un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M, +, .)$

3°/

$f : M' \longrightarrow M'$

$\mu = aI + bA \longmapsto f(\mu) = aI - bA$

* f est-il un endomorphisme de M' ? Soit $\mu = aI + bA$ et $\mu' = a'I + b'A$.

α) $\forall (\mu, \mu') \in M'$, $f(\mu + \mu') = (a+a')I + (b+b')A$

$= \underbrace{(aI - bA)}_{f(\mu)} + \underbrace{(a'I - b'A)}_{f(\mu')}$

β) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mu \in M'$:

$f(\lambda\mu) = \lambda a I - \lambda b A$

$= \lambda . f(\mu)$

f est donc un endomorphisme de M'.

* f est-il un automorphisme involutif de M' ?

Si oui, f est bijective et $f \circ f = f^{(2)} = Id$ Id : application identique de M

α) Bijectivité de f

Si oui, le noyau N_f de f se réduira à la seule matrice au seul vecteur nulle.

Or, $N_f = \{ \mu \in M' / f(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{0I + 0A}_{\text{décomposition unique}} \}$

$f(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto aI - bA = 0I + 0A \longmapsto (\text{cf. } 1°) \quad a = b = 0.$

Donc $N_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. f est donc bijective.

β) Involutivité. $\forall \mu = aI + bA \in M'$,

$f(\underbrace{aI + bA}_{\mu}) = aI - bA$

$(f \circ f)(\mu) = f[f(\mu)] = f(aI - bA) = aI + bA = \mu \longmapsto f \circ f = Id.$ M'

Donc, f est un automorphisme involutif de M'.

Défaut de rédaction / manque de logique. Réfléchir.

* M" a-t-il une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Non, car, si nous désignons par ϱ une matrice de M",

$$\varrho = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}$$

Alors $\lambda\varrho \notin M''$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ car, si $\lambda = \sqrt{2}$, par exemple, $\lambda\varrho = \begin{bmatrix} a\sqrt{2} & b\sqrt{2} \\ c\sqrt{2} & d\sqrt{2} \end{bmatrix}$

et : $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$, $c\sqrt{2}$ et $d\sqrt{2}$ n'appartiennent pas à $\mathbb{Z}$.

La multiplication par un scalaire réel n'est donc pas une opération externe. M" n'est pas un sous-espace vectoriel de M sur $\mathbb{R}$.

Vu

Attention ! Ce terme est très général et désigne un élément du corps des opérateurs ; dire chaque fois le nom exact du "scalaire"

Devoir n° 3

Terminale C. Devoir, pour le 17 octobre 1974

Soit E l'ensemble de nombres réels tels que :

$$E = \{ x \in \mathbb{R} \,;\, \exists (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,,\, x = a + b\sqrt{13} \}$$

(1°) Etude, dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, de l'équ^{on} : $a^2 - 13b^2 = 2$. Montrer que, si (a,b) est un couple-solution, alors a et b sont de même parité. En déduire que l'ensemble des solutions de cette équ^{on} est vide. Montrer qu'il en est de même de l'équation : $a^2 - 13b^2 = -2$.

(2°) Etude, dans $\mathbb{Z}^4$, du système : $\begin{cases} ac + 13bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$. Montrer que, si (a,b,c,d) est un élément de l'ensemble des solutions, alors on a : ou $(a=0$ et $b=0)$ ou $(c=0$ et $d=0)$.

(3°) Définir alors sur E une structure d'anneau, à l'aide des opérations usuelles. Cet anneau est-il unitaire, commutatif, intègre ?

(4°) On définit une application N de E dans $\mathbb{Z}$ de la façon suivante : $N : x = a + b\sqrt{13} \longmapsto N(x) = a^2 - 13b^2$. Cette application est-elle injective ? surjective ? Montrer aussi que :

$N(x.y) = N(x).N(y)$.

(5°) Soit U l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau E. Montrer que $x \in U$ si et seulement si $N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$. En déduire que la restriction à U de l'application N définit un homomorphisme de groupes de U sur l'ensemble $\{-1, 1\}$, munis de la multiplication usuelle.

(6°) Soit p un élément de E non inversible. On convient de l'appeler « irréductible » si p vérifie la condition suivante : « Toutes les fois que p est produit de 2 éléments de E, alors au moins un de ces éléments est inversible ».

* Montrer qu'en réalité, s'il en est ainsi, un et un seul de ces éléments est inversible.

* Les éléments suivants de E : -1 ; $+1$; $18 - 5\sqrt{13}$; 2 ; puis $1 + \sqrt{13}$ sont-ils inversibles ? sont-ils irréductibles ?

Mercier Dany-Jack
TC2

Jeudi 17 octobre 74

Vu

* Au (5°) $\exists x' ; xx' = x'x = 1$, pourrait être interprété par l'utilisation de $N(x) \in \mathbb{Z}$; $N(x') \in \mathbb{Z}$, et l'homomorphisme étudié.

Devoir de mathématique n° 3

* Relire l'énoncé du 6° : "Toutes les fois que p ..... "

Sujet : Se reporter à la fiche polycopiée.

Solution proposée.

1°/ Etude de l'équation :

$a^2 - 13b^2 = 2$ dans $\mathbb{Z}$. (1)

* Si (a, b) est un couple solution, alors a et b sont de même parité ?

$a^2 - 13b^2 = 2 \longmapsto a^2 - 13b^2 \equiv 0 \ [2]$

Remarquons que la réciproque n'est pas vraie. $a^2 - 13b^2 \equiv 0$ est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que $a^2 - 13b^2 = 2$.

Pour que $a^2 - 13b^2 \equiv 0 \ [2]$, il faut et il suffit que l'on ait :

ou $\begin{cases} a^2 \equiv 0 \ [2] \longmapsto a \equiv 0 \\ -13b^2 \equiv 0 \longmapsto \underbrace{-14b^2}_{\equiv 0} + b^2 \equiv 0 \longmapsto b^2 \equiv 0 \longmapsto b \equiv 0 \end{cases}$

ou bien $\begin{cases} a^2 \equiv 1 \ [2] \overset{\equiv 0}{\longmapsto} a \equiv 1 \\ -13b^2 \equiv 1 \longmapsto b^2 \equiv 1 \longmapsto b \equiv 1 \end{cases}$.

Donc, si (a, b) est solution de (1), alors ou $\begin{cases} a \equiv 0 \ [2] \\ b \equiv 0 \end{cases}$, ou $\begin{cases} a \equiv 1 \ [2] \\ b \equiv 1 \end{cases}$, ce qui signifie que a et b doivent avoir le même reste dans leur division par 2. Par conséquent, (a, b) solution de (1) $\longmapsto \{a \overset{et}{,} b\}$ de même parité.

* Ensemble des solutions S de cette équation.

De deux choses l'une :

α) a et b sont pairs. Donc : $\exists\, n \in \mathbb{Z},\ \exists\, n' \in \mathbb{Z}\ /\ a = 2n,\ b = 2n'$

$a^2 - 13b^2 = 2$ devient successivement :

$4n^2 - 13 \cdot 4n'^2 = 2$

$2n^2 - 13 \cdot 2n'^2 = 1$

$2(n^2 - 13n'^2) = 1$ Ou, en posant $n^2 - 13n'^2 = k \in \mathbb{Z}$ (car $\mathbb{Z}$ est un anneau)

$2k = 1$

Comme $2k$ est un nombre pair, et comme un nombre pair ne peut pas être égal à un nombre impair (en effet, $\nexists\, k \in \mathbb{Z}\ /\ 2k = 1$), l'équation n'est jamais vérifiée dans $\mathbb{Z}$.

$\nexists\,(a, b)$ pairs tous les deux et solutions de S(1)

β) a et b sont impairs : $\exists\,(n, n') \in \mathbb{Z}^2\ /\ a = 2n+1$ et $b = 2n'+1$.

$a^2 - 13b^2 = 2$ devient :

$4n^2 + 1 + 4n - 13(4n'^2 + 4n' + 1) = 2$

$2[2n^2 + 2n - 26n'^2 - 26n'] - 12 = 2$

$4(\underbrace{n^2 + n - 13n'^2 - 13n'}_{k,\ k \in \mathbb{Z}}) = 14$ ($\mathbb{Z}$ est un anneau)

$\underbrace{2k}_{\text{pair}} = \underbrace{7}_{\text{impair}}$, ce qui est manifestement impossible, $k \in \mathbb{Z}$.

$\nexists\,(a, b)$ impairs tous les deux et solutions de (1).

Donc $S = \emptyset$.

* Ensemble des solutions S' de l'équation $a^2 - 13b^2 = -2$. (2)

Nous devons toujours avoir $a^2 - 13b^2 \equiv 0\ [2]$. Donc a et b doivent nécessairement être de même parité (cf. 1ère partie).

α) a et b sont pairs.

$\exists\,(n, n') \in \mathbb{Z}^2\ /\ a = 2n,\ b = 2n'$.

$a^2 - 13b^2 = -2$ devient $\underbrace{2(n^2 - 13n'^2)}_{\text{pair}} = \underbrace{-1}_{\text{impair}}$ donc $\nexists\,(a, b)$ pairs et entiers relatifs tels que (2) soit vérifiée.

β) a et b sont impairs.

$\exists (n, n') \in \mathbb{Z} \;/\; a = 2n+1$ et $b = 2n'+1$

$a^2 - 13b^2 = -2$

$4n^2 + 1 + 4n - 13(4n'^2 + 1 + 4n') = -2$

$4\underbrace{(n^2 + n - 13n'^2 - 13n')}_{k \in \mathbb{Z}} - 12 = -2$

$4k = 10$

$\underbrace{2k}_{\text{pair}} = \underbrace{5}_{\text{impair}}$, impossible : $\nexists k \in \mathbb{Z} \;/\; 2k = 5$

En conclusion, $S' = \emptyset$

2°/ Etude, dans $\mathbb{Z}$, du système (3) :

$$(3)\begin{cases} ac + 13bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$

qui peut s'écrire : $$(3)\begin{cases} ac + 13bd = 0 \\ bc + ad = 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène ~~en~~ en. Considérons c et d comme étant les inconnues de ce système.

$$D = \begin{vmatrix} a & 13b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 13b^2$$

* Si $D \neq 0$, c'est-à-dire si $a^2 \neq 13b^2$
alors il existe un couple unique de solution, : $(c, d) = (0, 0)$.

* Si $D = 0 \longmapsto a^2 = 13b^2$,
Remarquons que $a^2 = 13b^2$ n'est vérifiée que si $a = b = 0$, autrement $13b^2$ ne serait jamais un carré parfait et ne pourrait donc jamais être égalée à un carré parfait.
Donc ~~Si~~ $D = 0 \longmapsto a = b = 0$.

En conclusion, si (a, b, c, d) est un élément de l'ensemble des solutions,

alors obligatoirement nous avons $\{a=b=0\}$ ou $\{c=d=0\}$

3°/ $(E,+,.)$ est-il une structure d'anneau ?

On sait que E est inclus dans $\mathbb{R}$ qui est un corps: $E \subset \mathbb{R}$

α) $(E,+)$ groupe commutatif ?

$E \subset \mathbb{R}$ et $(\mathbb{R},+)$ groupe commutatif.

Pour démontrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif, il faut démontrer que E est non vide, et que, $\forall (x,y) \in E^2$, $x-y \in E$.

* $E \neq \emptyset$

En effet, $0 = 0 + 0\sqrt{13} \in E$

* $\forall (x,y) \in E^2$, $\begin{cases} x = a + b\sqrt{13} & (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \\ y = c + d\sqrt{13} & (c,d) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$

et $x - y = (a + b\sqrt{13}) - (c + d\sqrt{13})$

$= \underbrace{(a-c)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b-d)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{13}$ (car $+$ est interne dans $\mathbb{Z}$.)

donc $x - y \in E$

Oui, $(E,+)$ est un groupe commutatif.

β) Etude de la loi $\times$ (encore notée .)

* La loi $\times$ est interne : $\forall (x,y) \in E$, $x.y = (a + b\sqrt{13}).(c + d\sqrt{13})$

avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}$.

$x.y = \underbrace{(ac + 13bd)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{13} \quad \longmapsto \quad x.y \in E$

* Associativité de $\times$.

$\times$ sera associative dans E car elle l'est dans $\mathbb{R}$ (Qui peut le plus peut le moins).

* Distributivité de $\times$ sur $+$

$\times$ sera distributive sur $+$ dans E car la multiplication est distributive sur l'addition dans $\mathbb{R}$.

En conclusion, $(E, +, .)$ est un anneau.

* Cet anneau est-il unitaire ?

Oui, car l'élément neutre ~~est~~ pour la seconde loi est $e = 1 = 1 + 0\sqrt{13} \in E$

* Cet anneau est-il commutatif ?

Bien sûr, puisque $\times$ est une opération commutative dans $\mathbb{R}$.

* Est-ce un anneau d'intégrité ?

Si oui, $x x' = 0 \vdash x = 0$ ou $x' = 0$

$(x, x') \in E$, on peut donc écrire, $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x = a + b\sqrt{13} \\ x' = c + d\sqrt{13} \end{cases}$$

Alors : $x x' = 0 \vdash (a + b\sqrt{13})(c + d\sqrt{13}) = 0$

$$(ac + 13bd) + (ad + bc)\sqrt{13} = 0$$

ce qui ne se produira dans $\mathbb{Z}$ que si (cf. fin du devoir) : $\begin{cases} ac + 13bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$

Nous retrouvons le système étudié au numéro 2.

On sait que les quadruplets solutions de ce système sont de la forme :

$$\begin{cases} (a, b, c, d) = (0, 0, c, d) \\ \text{ou } (a, b, c, d) = (a, b, 0, 0) \end{cases}$$

Donc $x x' = 0 \vdash (a = b = 0)$ ou $(c = d = 0)$

$x x' = 0 \vdash x = a + b\sqrt{13} = 0$ ou $x' = c + d\sqrt{13} = 0$.

L'anneau est intègre. CQFD.

En conclusion, $(E, +, .)$ est un anneau commutatif unitaire d'intégrité.

4°/

$$N : E \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \longmapsto N(x) = a^2 - 13b^2 \qquad (a, b) \in \mathbb{Z}$$

* Cette application n'est pas injective car si a et b ne sont pas simultanément nuls, $a^2 - 13b^2$ est l'image de 2 éléments distincts de E, à savoir $x = a + b\sqrt{13}$ et $x' = -x = -a - b\sqrt{13}$.

Nous écrivons : $\forall x \in E^*$, $\forall x' \in E^*$, $N(x) = N(x') \not\vdash x = x'$

puisque $N(x) = N(-x)$ et $x \neq -x$.

L'application N n'est pas surjective. En effet, $2 \in \mathbb{Z}$ n'a pas d'antécédent dans E (cf question 1°).

* $\forall (x, y) \in E^2$, $\begin{cases} x = a + b\sqrt{13} \\ y = c + d\sqrt{13} \end{cases}$

$\begin{cases} N(x) = a^2 - 13b^2 \\ N(y) = c^2 - 13d^2 \end{cases}$

$N(x) \cdot N(y) = (a^2 - 13b^2)(c^2 - 13d^2)$

$= a^2c^2 - 13a^2d^2 - 13c^2b^2 + (13)^2 b^2 d^2$

$= a^2c^2 + (13)^2 b^2 d^2 - 13(a^2d^2 + b^2c^2) + 26abcd - 26abcd$

$= (ac + 13bd)^2 - 13(ad + bc)^2$

$= N\left[(ac + 13bd) + (ad + bc)\sqrt{13}\right]$

$= N\left[(a + b\sqrt{13})(c + d\sqrt{13})\right]$

$= N(x.y)$

$$\boxed{N(x.y) = N(x) \cdot N(y)}$$

5°/

$x \in U \longmapsto N(x) = \pm 1$?

α) $N(x) = \pm 1 \longmapsto x \in U$?

Posons $x = a + b\sqrt{13}$ $(x \in E)$

$N(x) = \pm 1 \longmapsto a^2 - 13b^2 = \pm 1$

$(a + b\sqrt{13})(a - b\sqrt{13}) = \pm 1$

Deux cas sont à considérer :

* Si $(a + b\sqrt{13})(a - b\sqrt{13}) = +1$, alors $x = a + b\sqrt{13}$ admet manifestement un inverse qui est $x' = a - b\sqrt{13}$

* Si $(a + b\sqrt{13})(a - b\sqrt{13}) = -1$

$(a + b\sqrt{13})(-a + b\sqrt{13}) = 1$

Alors $x = a + b\sqrt{13}$ admet $x' = -a + b\sqrt{13}$ comme inverse.

En conclusion, $\underline{N(x) = \pm 1 \vdash x \in U}$ (1)

β) $\underline{x \in U \vdash N(x) = \pm 1\ ?}$

Prenons $x = a + b\sqrt{13} \in U$

Donc $\exists x' \in E \ / \ xx' = x'x = 1$ suffit

Dans $\mathbb{R}$, $x' = \frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{13}} = \frac{a - b\sqrt{13}}{a^2 - 13b^2} = \underbrace{\frac{a}{N(x)}} - \frac{b}{N(x)}\sqrt{13}$

inutile

nous supposons $N(x) \neq 0$ car si $N(x) = 0$, $\nexists x' \in E$

puisque $N(x) = a^2 - 13b^2$

Mais $x' \in E$ par hypothèse. Il faut donc obligatoirement que :

$$\frac{a}{N(x)} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{b}{N(x)} \in \mathbb{Z}$$

C'est-à-dire : $\exists q \in \mathbb{Z} \ / \ a = q \cdot N(x)$ (1')

$\exists q' \in \mathbb{Z} \ / \ b = q' N(x)$ (2')

Comme $N(x) = a^2 - 13b^2$, en tenant compte de (1') et (2') :

$$N(x) = q^2 [N(x)]^2 - 13\, q'^2 [N(x)]^2$$

$N(x) \neq 0$, on peut écrire : $1 = q^2 . N(x) - 13 q'^2 . N(x)$.

$$N(x)\left[q^2 - 13\, q'^2\right] = 1$$

$$\underbrace{q^2 - 13\, q'^2}_{\in \mathbb{Z} \text{ (anneau)}} = \frac{1}{N(x)}$$

Il faut donc que $\frac{1}{N(x)} \in \mathbb{Z}$ donc que $N(x) = \pm 1$

En conclusion, il f $\underline{x \in U \vdash N(x) = \pm 1}$. (2)

De (1) et de (2), nous déduisons que $\boxed{\forall x \in U \vdash N(x) = \pm 1}$ (3)

fausse { La relation (3) nous montre que la restriction à U de l'application N définit un homomorphisme (car $\forall (x,y) \in E$, $N(x.y) = N(x).N(y)$ et en particulier si $(x,y) \in U^2$. Alors $N(xy) = (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1 \in \{-1, 1\}$

<u>N est-il un homomorphisme de groupe de U sur l'ensemble $\{-1, 1\}$?</u>

Auparavant, vérifions que $(U, \times)$ et $(\{-1,1\}, \times)$ sont des groupes.

* $(U, \times)$ groupe ?

$U \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est un groupe multiplicatif.

$(U, \times)$ sous-groupe multiplicatif ?

U n'est pas l'ensemble vide puisque $x = 1 + 0\sqrt{B} \in U$ car :

$\underbrace{1}_{\in U} \times \underbrace{1}_{\in U} = 1$ 1 est inversible.

D'autre part : $\forall (x, y) \in U^2$, $x \cdot y' \in U$?

$x \in U$ donc $N(x) = \pm 1$

$y \in U$ donc si y' est le symétrique de y , c'est-à-dire que :

$y \times y' = 1$ alors nous pouvons aussi dire que y est le symétrique de y'. Donc $y' \in U$.

Comme $y' \in U$, alors $N(y') = \pm 1$.

$N(x y') = N(x) . N(y')$ (cf propriété obtenue au numéro 4)

$= (\pm 1)(\pm 1)$

$N(x y') = \pm 1 \longmapsto x y' \in U$

Donc, $(U, \times)$ = groupe.

* $\{-1, 1\}$ groupe multiplicatif.

Observons que $\{-1,1\} \subset \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$: corps commutatif.

a) Nous voyons que $\{-1,1\}$ est non vide.

b) Chaque élément de $\{-1,1\}$ admet un symétrique : le symétrique (ou inverse) de -1 est -1 ; celui de 1 est 1 . En effet : $(-1) \times (-1) = 1$

et : $1 \times 1 = 1$

c) La multiplication est interne dans $\{-1,1\}$: $(\pm 1) \times 1 = -1 \in$

$(\pm 1) \times (\pm 1) = \pm 1 \in \{-1,1\}$

Donc $\{-1,1\}$ = groupe

* On sait que $\forall x \in U$, $N(x) = \pm 1$. Donc, N définit un homomor

-phisme (on sait que $\forall (x,y) \in E$, $N(xy) = N(x).N(y)$, donc que, en particulier, $\forall (x,y) \in U$, $N(xy) = N(x).N(y)$) du groupe $(U, \times)$ sur le groupe $(\{-1,1\}, \times)$.

6°/

p étant non inversible, $N(p) \neq \pm 1$

* Si p est "irréductible", $p = x\,y$ avec ~~l'un des deux~~ au moins un des éléments x et y inversible.

Donc, par exemple (ce qui ne restreint pas la généralité), soit x inversible.

Alors $N(x) = \pm 1$.

Et : $N(p) \neq \pm 1$

$N(xy) \neq \pm 1$

$N(x) . N(y) \neq \pm 1$

$(\pm 1)\ N(y) \neq \pm 1$

$N(y) \neq \pm 1 \quad \longmapsto$ y n'est pas inversible.

Donc p est irréductible si et seulement si un et un seul des "facteurs" de p est inversible.

* $(-1) \in U$ car $\underbrace{-1}_{-1+0\sqrt{13}} \in E$ et $N(-1) = 1$ (cf. question n° 5)

* $1 = 1 + 0\sqrt{13} \in E$ et 1 est inversible car $N(1) = 1^2 - 13(0)^2 = 1$

* $18 - 5\sqrt{13} \in E$

et $N(18 - 5\sqrt{13}) = 18^2 - 13(5^5)$

$= -1$

Donc $18 - 5\sqrt{13}$ est inversible.

* $2 = 2 + 0\sqrt{13} \in E$ et $N(2) = 4 \neq \pm 1$

2 n'est pas inversible.

Est-il irréductible ?

Oui car $2 = \underbrace{1}_{\text{inversible}} \times 2$ // Vous avez de la chance

* $1 + \sqrt{13} \in E$ et $N(1 + \sqrt{13}) = 1 - 13 = -12 \neq \pm 1$

$1 + \sqrt{13}$ n'est pas inversible.

$1+\sqrt{13}$ est-il irréductible ?

Oui, puisque $1+\sqrt{13} = 1 \times (1+\sqrt{13})$. insuff.

Remarque

Nous voyons que tous les éléments non inversibles sont irréductibles.

En effet, si $\forall y \notin U$ et $y \in E$, y peut s'écrire :

$y = \underbrace{1}_{\text{inversible}} \times y$.

relire l'énoncé

Note : Condition d'égalité de 2 éléments de E.

Soit $x = a + b\sqrt{13} \in E$

et $y = c + d\sqrt{13} \in E$.

$x = y \mapsto a + b\sqrt{13} = c + d\sqrt{13}$

$\underbrace{a-c}_{\in \mathbb{Z}} = (d-b)\sqrt{13}$

Le second membre de l'égalité ne sera un entier relatif si et seulement

si $d-b=0 \mapsto d=b$

donc $a-c=0 \mapsto a=c$

Conclusion : $\star\ a + b\sqrt{13} = c + d\sqrt{13} \mapsto \begin{cases} a=c \\ d=b \end{cases}$

Correction

5% B)

x inversible $\vdash xy = 1$ $\qquad x = a + b\sqrt{13}$

$1 = 1 + 0\sqrt{13}$

Comme $N(xy) = N(x) \cdot N(y)$

alors $N(1) = \underbrace{N(x)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{N(y)}_{\in \mathbb{Z}}$

alors $1 = q \times q' \vdash \boxed{q = \pm 1} \qquad (q, q') \in \mathbb{Z}^2$

Remarque : $q' = \pm 1$

$\underline{x \in U \vdash N(x) = \pm 1}$

Remarque : Sf. neutre $\exists e \in E \quad \forall x \in E \;/\; e \times x = x \times e = x$

Sf. symétrique $\forall x \in E, \exists x' \in E \;/\; x \times x' = x' \times x = e$

ENONCE

Terminale C - Devoir en classe - Mercredi 20 novembre 74.

(I) Existe-t-il au moins un entier naturel p, inférieur à 1000, multiple de 12, et dont la division euclidienne par un entier naturel x, inconnu lui aussi, donne 35 pour quotient et 14 pour reste ?

(II) Soit $\vec{E}_2$ un espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et soit f l'endomorphisme de $\vec{E}_2$ dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ -\frac{1}{4} & b \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut déterminer a et b de manière que f soit une projection vectorielle de $\vec{E}_2$ qu'on déterminera complètement. Démontrer qu'il existe au moins une base $(\vec{i}', \vec{j}')$ de $\vec{E}_2$ dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(III) Soient 3 points A, B, C d'un espace affine E. A tout point M de E, on associe le point M' défini par : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$.

1° Démontrer que l'application f de E vers E, qui, à tout point M, fait correspondre le point M', est bijective.

2° Démontrer qu'il existe un point G de E, et un seul, invariant par f.

3° Démontrer que, $\forall M \neq G$, la droite MM' contient le point G.

4° On suppose que E est de dimension 3 et que les points A, B, C ont pour coordonnées respectives : $A(-1, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$; $C(0, 0, 1)$ dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E.

* Calculer les coordonnées du point G.

* Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la droite D d'équations : $\begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0. \end{cases}$

* Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit le plan P d'équation : $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

Mercier Dany-Jack
TC2

Mercredi 20 novembre 74

16/20 { 4 ; 6 ; 6

Mathématique

I $p < 1000$

$p \equiv 0 \ [12] \longmapsto \exists\, q \in \mathbb{Z} \ / \ p = 12q \quad (1)$

~~$p = 14 \ [Ex]$, ri~~

De plus, $p = 35x + 14 \quad (2)$ et $14 < x$

De (1) et (2), on déduit : $12q = 35x + 14$

$12q - 35x = 14 \quad (3)$

Cherchons une solution évidente de l'équation (3). (on sait qu'elle existe puisque 12 et -35 sont premiers entre eux).

Pour cela, cherchons d'abord une solution (un couple solution) à l'équation de Bezout $12q - 35x = 1 \quad (4)$

Utilisons l'algorithme d'Euclide :

$35 = 12 \times 2 + 11$

$12 = 11 \times 1 + 1$

Donc :

$11 = 35 - 2.12$

$1 = 12 - 11 = 12 - 35 + 2.12 \longmapsto 1 = 3.12 - 35$

~~Une solution~~

$1 = 12(3) - 35(1)$

$(3,1)$ couple solution de (4).

Un couple solution de (3) sera donc : $(3\times14\ ,\ 1\times14) = (42\ ,\ 14)$

On écrit :

$$\begin{cases} 12q - 35x = 14 \\ 12(42) - 35(14) = 14 \end{cases}$$

$$12(q-42) - 35(x-14) = 0$$

$$12(q-42) = 35(x-14) \qquad (5)$$

12 est premier avec 35 et divise le produit $35(x-14)$.

12 divise donc $x-14$ (cf Théorème de Gauss).

$\exists\ k \in \mathbb{Z}\ /\ x - 14 = 12k$

Alors (5) donne : $12(q-42) = 35(12k)$

$$q = 35k + 42$$

En conclusion : $\begin{cases} x = 12k + 14 \\ q = 35k + 42 \end{cases}$

(1) donne alors : $p = 12q$

$$= 12(35k + 42)$$

$$p = 420k + 504 \qquad (6)$$

Oui, il existe au moins un entier naturel $p < 1000$, répondant à la question.

Par exemple, de $\begin{cases} p = 420k + 504 \\ p < 1000 \end{cases}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

on en tire ~~$p = 504$~~ pour $k = 0$

ne convient pas ; pourquoi ?

Mais un oubli important

II

f = endomorphisme de $\vec{E}_2$ de matrice $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ -\frac{1}{4} & b \end{bmatrix}$

1°) Condition pour que f soit une projection vectorielle.

Il faut et il suffit que $f \circ f = f$

Donc :

$$A \times A = A$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ -\frac{1}{4} & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ -\frac{1}{4} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ -\frac{1}{4} & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{a}{4} & \frac{a}{2} + ab \\ -\frac{1}{8} - \frac{b}{4} & -\frac{a}{4} + b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ -\frac{1}{4} & b \end{bmatrix}$$

ce qui est équivalent à :

$$(I)\begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \vdash 1 - a = 2 \vdash a = -1 \\ \frac{a}{2} + ab = a \vdash a + 2ab = 2a \vdash -1 - 2b = -2 \\ \text{ou} \\ -\frac{1}{8} - \frac{b}{4} = -\frac{1}{4} \vdash -1 - 2b = -2 \vdash \cancel{2b} = -1 - 2b = -2 \\ -\frac{a}{4} + b^2 = b \vdash -a + 4b^2 = 4b \vdash 1 + 4b^2 = 4b \end{cases}$$

$$(I) \vdash \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \\ 1 + 4\,\frac{1}{4} = 4\,\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (ce qui est vrai.)}$$

donc $\boxed{\begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}}$

Alors f a pour matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Détermination de f.

* Recherche du Noyau de f : Nf.

Soit $\forall \vec{u}(x,y) \in Nf$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x - y = 0 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{array} \right\} \mapsto \quad x - 2y = 0.$$

Donc Nf = droite vectorielle d'équation cartésienne $x - 2y = 0$.
Un vecteur directeur de Nf est, par exemple, $\vec{e}_1 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

* Recherche de l'ensemble des images de f : soit $\mathrm{Im} f$.

$\forall \vec{v}(x',y') \in \mathrm{Im} f$, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ /

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x - y = x' \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = y' \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 2x' \\ -x + 2y = 4y' \end{array} \right\} \mapsto \begin{array}{l} 2x' = -4y' \\ x' = -2y' \end{array}$$

Soit $\vec{D}$ la droite vectorielle d'équation $x' + 2y' = 0$
On a démontré que $\mathrm{Im} f \subset \vec{D}$.

Vecteur directeur ? (Vu plus loin)

Inversement, peut-on dire que $\vec{D} \subset \mathrm{Im} f$?
$\forall \vec{v} \in \vec{D}$, $\vec{v}(-2y', x')$

Mais on sait que $\dim \mathrm{Im} f = 1$, puisque l'on connaît la relation :

$$\underbrace{\dim Nf}_{1} + \dim \mathrm{Im} f = \underbrace{\dim \vec{E}_c}_{2} \mapsto \dim \mathrm{Im} f = 1.$$

Vu

Donc, nécessairement, comme $\mathrm{Im}\, f \subset \vec{D}$ et que $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \vec{D}$, on a $\mathrm{Im}\, f = \vec{D}$

$\mathrm{Im}\, f$: droite vectorielle d'équation $x + 2y = 0$
Un vecteur directeur de $\mathrm{Im}\, f$ est, par exemple, $\vec{e}_2 = -2\vec{i} + \vec{j}$

---

f est donc la projection vectorielle de base $\mathrm{Im}\, f$ (ou "ouï") et de direction N_f (ou "parallèlement à").

Remarque.

B

La base de la projection vectorielle f est aussi l'ensemble des vecteurs invariants de $\vec{E}_2$ par f. Puisque $f \circ f = f$, $\forall \vec{u} \in \mathrm{Im}\, f$, $\exists \vec{v} \in E / f(\vec{v}) = \vec{u}$ et $f(\vec{u}) = f[f(\vec{v})] = f(\vec{v}) = \vec{u}$

$\mathrm{Im}\, f$ = ensemble des vecteurs invariants par f.

2°/ Base $(\vec{i}', \vec{j}')$

Pour e,

Par exemple, prenons la base $\mathcal{B} = (\underbrace{\vec{e}_1}_{\in N_f}, \underbrace{\vec{e}_2}_{\in \text{ensemble des vecteurs invariants}})$.

Donc $f(\vec{e}_1) = \vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$
$f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$

Etourd

Bien

Prenons plutôt la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_2, \vec{e}_1)$
La matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

III

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M' \ / \ \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \end{array} \quad (1)$$

1°) f bijective ? (Cf autre démonstration à la fin du devoir)

Considérons :

a) la fonction $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \vec{E} \\ M & \longrightarrow & f_1(M) = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \end{array}$

Nous reconnaissons la fonction vectorielle de Leibnitz pour les 3 points $A(1)$, $B(-2)$, $C(3)$.

On voit que la somme des coefficients est :

$$\alpha = \sum \alpha_i = 1 - 2 + 3 = 2 \neq 0.$$

f_1 est donc bijective (voir cours)

b) la fonction $f_M : \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & E \\ \vec{u} & \longmapsto & f_M(\vec{u}) = M' \ / \ \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \end{array}$

Cette fonction f_M est la fonction réciproque de la fonction $\hat{f}_M$, connue (dans la définition axiomatique de l'espace affine E) telle que

$$\hat{f}_M : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \vec{E} \\ M' & \longmapsto & \vec{u} \ / \ \vec{u} = \overrightarrow{MM'} \end{array} \quad , M \in E$$

On a démontré que c'était une bijection dans le cours.

Donc f_M est une bijection (la réciproque d'une bijection est une bijection).

Finalement

En conclusion, $f = f_M \circ f_1$ est la composée de 2 bijections

f est donc elle-même une bijection (remarque : $f^{-1} = (f_M \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_M^{-1}$)

(et $\exists f_1^{-1}$, et $\exists f_M^{-1}$)

2°) Point G invariant par f.

(1) devient, puisque G est tel que $f(G) = G$:

$$\overrightarrow{GG} = \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} \longmapsto \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Soit O l'origine d'un repère cartésien de $\vec{E}$.

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} - 2\vec{OB} + 3\vec{OC}}{2} \quad (1)$$

G est évidemment le barycentre des 3 points A(1), B(-2) et C(3). et on sait qu'il existe, unique, dès que $\sum \alpha_i \neq 0$

Si l'on prend O en B.

(1) devient : $\vec{BG} = \frac{\vec{BA} + 3\vec{BC}}{2}$

De deux choses l'une : (la distinction n'apporte rien)

* $(\vec{BA}, \vec{BC})$ = partie liée, donc génératrice de $\vec{E}$ = base de $\vec{E}$.

Alors $\exists!$ G / $\vec{BG} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{3}{2}\vec{BC}$

* $(\vec{BA}, \vec{BC})$ = partie liée ; alors $\exists\ \vec{u} \in \vec{E}$ / $\vec{BG} = k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$.

Et G est unique.

3°/

(1) peut s'écrire, en prenant O en M :

$$\vec{MG} = \frac{1}{2}\underbrace{(\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC})}_{\vec{MM'}}$$

(2) $\boxed{\vec{MG} = \frac{1}{2}\vec{MM'}}$ $\forall\ M \in \neq G \in E$. Vu

↓

C'est suffisant pour affirmer que $\blacksquare$ $G \in (MM')$

4°/ E dim E = 3

* Coordonnées de G :

Soit $G(x_G, y_G, z_G)$.

Nous avons : 1 de relation (1))

$$x_G = \frac{1(-1) - 2(0) + 3(1)}{2}$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1(-1) - 2(0) + 3(0)}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ y_G = \dfrac{1(0) - 2(2) + 3(0)}{2} = -2 \\ z_G = \dfrac{1(0) - 2(0) + 3(1)}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{G : \left(-\frac{1}{2}, -2, \frac{3}{2}\right)} \quad (3)$$

M décrit D

* D'après la relation (2), nous avons :

$$\vec{MG} = \frac{1}{2}\vec{MM'} \quad \longmapsto \quad \vec{MG} = \frac{1}{2}(\vec{MO} + \vec{OM'})$$

$$\vec{MO} + \vec{OM'} = 2\vec{MG}$$

$$\vec{OM'} = 2\vec{OG} - 2\vec{OM} + \vec{OM}$$

$$\vec{OM'} = 2\vec{OG} - \vec{OM} \quad (4)$$

+B

$$M(x, y, z) \in D \longmapsto \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

(4) peut s'écrire : (en posant $\overrightarrow{OM'}(x', y', z')$)

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - x \\ y' = 2(-2) - y \\ z' = 2\left(\frac{3}{2}\right) - z \end{array}\right\} \longmapsto \left\{\begin{array}{l} x' = -1 - x \\ y' = -4 - y \\ z' = 3 - z \end{array}\right. \quad (II)$$

+B

Gr (x,y,z) / $\left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{array}\right\} \longmapsto \left\{\begin{array}{l} x = y \\ z = -1 \end{array}\right.$

$$(II) : \left\{\begin{array}{l} x' = -1 - x \\ y' = -4 - x \\ z' = 3 + 1 \longmapsto z' = 4 \end{array}\right\} \longmapsto x' + 1 = y' + 4 \longmapsto x' - y' - 3 = 0$$

et la réciproque ?

En conclusion, l'ensemble des points M' est la droite affine D_1 d'équations $\left\{\begin{array}{l} x - y - 3 = 0 \\ z = 4 \end{array}\right.$

* Si M décrit P

Reprenons la relation (4) : $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OM}$ / B

Soit $M(x,y,z) \in P$

Soit $M'(x',y',z')$.

De (4), on tire :

$$III \left\{\begin{array}{l} x' = -1 - x \\ y' = -4 - y \\ z' = 3 - z \end{array}\right. \qquad Gr\ (x,y,z) / \ x - 2y + 3z + 1 = 0$$

$$III \left\{\begin{array}{l} -x' = 1 + x \\ 2y' = -8 - 2y \\ -3z' = -9 + 3z \end{array}\right.$$

$$-x' + 2y' - 3z' = -16 + \underbrace{(x - 2y + 3z)}_{-1 \text{ car } x - 2y + 3z + 1 = 0}$$

$$-x' + 2y' - 3z' = -17$$

$$-x' + 2y' - 3z' + 17 = 0$$
$$x' - 2y' + 3z' - 17 = 0$$

Réciproque ?

En conclusion, l'ensemble des points M', lorsque M décrit le plan affine P, est le plan P_1 d'équation : $x - 2y + 3z - 17 = 0$

Autre démonstration du III 1°)

$f : E \longrightarrow E$

$M \longmapsto M' \quad / \quad \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$

* f est injective ?

$\forall (M_1, M_2) \in E^2,\ f(M_1) = f(M_2) \longmapsto M_1 = M_2$?

Posons $f(M_1) = M_1'$ et $f(M_2) = M_2'$

Nous avons :

$M_1' = M_2' \longmapsto \overrightarrow{M_1M_1'} = \overrightarrow{M_2M_2'}$ (c'est une condition nécessaire)

$\overrightarrow{M_1A} - 2\overrightarrow{M_1B} + 3\overrightarrow{M_1C} = \overrightarrow{M_2A} - 2\overrightarrow{M_2B} + 3\overrightarrow{M_2C}$

Soit O fixe, $O \in E$:

$\overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{M_1O} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{M_1O} + 3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{M_2O} + \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{M_2O} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{M_2O} + 3\overrightarrow{OC}$

$2\overrightarrow{M_1O} = 2\overrightarrow{M_2O}$

$\overrightarrow{M_1O} = \overrightarrow{M_2O}$

$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} \longmapsto M_1 = M_2$.

TD

Ainsi, $f(M_1) = f(M_2) \longmapsto M_1 = M_2$.

Donc f est injective.

regrettable, car vous étiez dans la bonne voie

* f est-elle surjective ? Je ne suis pas arrivé à le démontrer ainsi.

$\forall M' \in E$, $\exists M \in E$ / $f(M) = M'$?

$M' \in E$ ⟼ O point quelconque de E, $\overrightarrow{OM'} = \vec{u}$ et $\exists \vec{u} \in \vec{E}$ (espace vectoriel associé)
(donné)

oui

Rien ne nous empêche de prendre $\vec{u} = \overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC}$, $K \in E$

Alors O est fixé puisque K l'est aussi

Remarquons bien que :

pour un vecteur $\vec{u}$ fixé dans $\vec{E}$, il correspond un seul point $O \in E$.

Si nous prenons $\vec{u} = \overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC}$, $K \in E$, alors $\exists ! K_1 \in E$
(K fixé)

tel que $\overrightarrow{K_1M'} = \overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC}$

Soit O pt fixe donné :

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ ⟼ $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC})$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM'}$

et dès que M' est donné, alors $\exists ! M$, et du même coup, vous montrez que c'est une bijection.

4h - Terminale C - Devoir en classe - 28 novembre 1974

(I) Soit f un endomorphisme de E_3, esp. vect. de dim. 3, défini par les égalités : $x' = 3x - 4y - 2z$; $y' = 4x - 7y - 4z$; $z' = -5x + 10y + 6z$. avec $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\forall \vec{u} \in E_3$; base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; $\vec{u'} = f(\vec{u})$ et $\vec{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

1° Montrer que f n'est pas bijective. Déterminer Nf et Imf. On donnera une équation cartésienne pour l'un, une base pour l'autre. 2° Montrer que $E_3 = Imf \oplus Nf$. En déduire la nature de f puis l'ensemble des vecteurs invariants par f.

(II) Soit un ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où n désigne un entier naturel premier. On pose $G_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et $G_n = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

1) Montrer que si un élément x de G_n, soit $x = \dot{k}$, $k \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}$, admet une racine carrée a dans G_n, alors il en possède deux et deux seulement. Application : Dans G_{97}, 9 possède-t-il des racines carrées ? Même question, dans G_{17}, pour 15.

2) Montrer que si $n \geq 3$ et n premier, et si $x \in G_n - \{\dot{0}\}$ si x possède 2 racines carrées, alors celles-ci sont distinctes. On considérera ensuite les racines carrées éventuelles des éléments de G_2.

3) Combien existe-t-il dans G_n ($n \geq 3$ et n premier) d'éléments ayant deux racines carrées distinctes ? Combien y en a-t-il qui n'en possèdent pas ? Combien y en a-t-il qui possèdent deux racines confondues ?

4) Résoudre dans G_7 l'équation : $\dot{2}x^2 + \dot{3}x + \dot{1} = \dot{0}$, en utilisant successivement les deux méthodes suivantes :

* remplacer l'équ° donnée par une équ° du type : $(x + \dot{k})^2 = \dot{m}$, puis terminer la résolution

* remplacer l'équ° donnée par une équ° du type : $x(x + \dot{p}) = \dot{q}$ puis terminer.

5) Soit α l'inverse de $\dot{2}$ dans G_n (n premier) * Donner un représentant simple, entier naturel, de α. Application numérique : calculer α dans G_{97}, puis dans G_{23}.

* Soit l'équation : $x^2 + x + \overline{n-2} = \dot{0}$, dans G_n. Vérifier qu'elle admet les 2 racines apparentes $x' = \dot{1}$ et $x'' = \overline{n-2}$. Puis calculer "le discriminant réduit" obtenu comme on le calcule à propos d'une équ° du 2e degré à résoudre dans $\mathbb{R}$; montrer qu'il est égal à $\alpha^2 + \dot{2}$. Pourquoi est-on assuré qu'il admet deux racines carrées distinctes, sauf dans G_3 où elles sont confondues ? Les calculer dans G_5 ; on les désigne par z' et z''. Retrouver alors x' et x'' par le calcul suivant, qu'on explicitera : $x' = -\alpha + z'$; $x'' = -\alpha + z''$

(III) Dans l'espace affine euclidien E_2 muni du rep. orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(0,4)$; $B(7,4)$; $C(7,0)$; $D(0,0)$.

Soient f et g les applications de E dans $\vec{E}$ (esp. vect. associé) :

$f : M \longmapsto \vec{f}(M) = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} + 4\vec{MD}$

$g : M \longmapsto \vec{g}(M) = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} - 4\vec{MD}$

1° on étudiera ces 2 fonctions ; on donnera des deux images une forme réduite ; on déterminera ensuite l'ensemble des points M de E tels que : $\vec{f}(M) \cdot \vec{g}(M) = 0$.

2° φ_1 et φ_2 désignent les applications de E dans $\mathbb{R}$:

$\varphi_1 : M \longmapsto \varphi_1(M) = MA^2 + MB^2 + 2MC^2 + 4MD^2$

$\varphi_2 : M \longmapsto \varphi_2(M) = MA^2 + MB^2 + 2MC^2 - 4MD^2$

Déterminer l'ens. F_1 des points de E tels que : $\varphi_1(M) = AB^2 + 2AC^2 + 4AD^2$, et l'ens. F_2 des M ; $\varphi_2(M) = AB^2 + 2AC^2 - 4AD^2$.

- Figure -

Mercier Dany-Jack
TC2

Jeudi 28 novembre 1974

14/20

Composition de Mathématique.

I La matrice de l'endomorphisme f est $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

1° f n'est pas bijective ? Détermination de Nf.

a) Nf ?

$Nf = \{ \vec{u},\ \vec{u} \in \vec{E}_3 \ /\ f(\vec{u}) = \vec{0} \}$

Si $\vec{u}(x, y, z)$, alors :

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 & (1) \\ 4x - 7y - 4z = 0 & (2) \\ -5x + 10y + 6z = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) et (2) : $\begin{cases} 3x - 4y = 2z \\ 4x - 7y = 4z \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 16 = -5$$

donc $$x = \frac{\begin{vmatrix} 2z & -4 \\ 4z & -7 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-14z + 16z}{-5} = -\frac{2}{5}z$$

et $$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2z \\ 4 & 4z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{12z - 8z}{-5} = -\frac{4}{5}z$$

Dans (1) :

$$3x - 4y - 2z = 0$$

$$3\left(-\frac{2}{5}z\right) - 4\left(-\frac{4}{5}z\right) - 2z = 0$$

$$-6z + 16z - 10z = 0$$

$$0z = 0 \quad \text{vérifié} \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

us (fém : incluse)

L'ensemble N_f est donc inclu dans la droite vectorielle $(\vec{D})$ d'équations paramétriques :

$$(\vec{D}) \begin{cases} x = -\frac{2}{5}\lambda \\ y = -\frac{4}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

en prenant $\lambda = -5\mu$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$,

$$(\vec{D}) \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 4\mu \\ z = -5\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Inversement, $\forall \vec{u} \in (\vec{D})$, $\vec{u} \in N_f$?

$\vec{u} \in (\vec{D}) \mapsto \vec{u}\,(2\mu, 4\mu, -5\mu)$.

Alors, en désignant par $\vec{v}$ l'image de $\vec{u}$:

$\vec{v}(x', y', z')$:

$$\begin{cases} x' = 3(2\mu) - 4(4\mu) - 2(-5\mu) = 0 \\ y' = 4(2\mu) - 7(4\mu) - 4(-5\mu) = 0 \\ z' = -5(2\mu) + 10(4\mu) + 6(-5\mu) = 0 \end{cases}$$

et $\bar{I}$

Donc $N_f = \vec{D}$, à savoir $(\vec{D}) : \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 4\mu \\ z = -5\mu \end{cases}$

oui

Une base de N_f est $\vec{e}_1\,(2, 4, -5)$

N_f est-elle bijective ?

Evidemment non puisque $N_f \neq \{\vec{0}\}$ (cf question précédente).

2°/ Détermination de $\mathrm{Im} f$.

Remarquons que :

$$\dim \mathrm{Im} f = \dim \vec{E}_3 - \dim N_f$$
$$= 3 - 1 = 2 \qquad \text{donc} \quad \dim \mathrm{Im} f = 2$$

$\forall \vec{u}(x', y', z') \in \mathrm{Im} f$, $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ /

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = x' & (1) \\ 4x - 7y - 4z = y' & (2) \\ -5x + 10y + 6z = z' & (3) \end{cases}$$

(1) et (2) :

$$\begin{cases} 3x - 4y = x' + 2z \\ 4x - 7y = y' + 4z \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 16 = -5$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} x'+2z & -4 \\ y'+4z & -7 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}\left(-7x' - 14z + 4y' + 16z\right) \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & x'+2z \\ 4 & y'+4z \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}\left(3y' + 12z - 4x' - 8z\right) \end{cases}$$

CNF

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5}\left(-7x' + 4y' + 2z\right) \\ y = -\frac{1}{5}\left(3y' - 4x' + 4z\right) \end{cases}$$

Dans (3) :

$$-7x' + 4y' + 2z - 2(3y' - 4x' + 4z) + 6z = z'$$
$$-7x' + 4y' + 2z - 6y' + 8x' - 8z + 6z = z'$$
$$0z = x' - 2y' - z'$$

Or, cette équation n'est vérifiée que si $x' - 2y' - z' = 0$

Il faut donc que $x' - 2y' - z' = 0$ pour qu'il existe (x, y, z) (et même une infinité de triplets)

Donc Plan $(\vec{P})$: $x - 2y - z = 0$

Dites ici : On sait que Im f a une str. d'esp. vect sur $\mathbb{R}$.

On a : $\operatorname{Im} f \subset (\vec{P})$ et $\dim \operatorname{Im} f = \dim \vec{P} = 2$

Donc

- $\operatorname{Im} f = (\vec{P})$

$$\boxed{\operatorname{Im} f = (\vec{P}) : \quad x - 2y - z = 0}$$

une base de $(\vec{P})$ est, par exemple : $\vec{e}_2\,(1, 0, 1)$
$\vec{e}_3\,(2, 1, 0)$

3°/ $E_3 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{N} f$?

On sait que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{N} f$ sont des sous-espaces de $\vec{E}_3$.

ne pas utiliser la propriété caractéristique sans explicitement le signaler

Il suffit de démontrer que leur intersection est réduite au singleton $\{\vec{0}\}$ pour affirmer que $\vec{E}_3 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{N} f$.

En effet, s'il en est ainsi, 1 vecteur de $\operatorname{N} f$ et 2 vecteurs du plan vectoriel $\operatorname{Im} f$ engendreront tout l'espace $\vec{E}_3$.

Attention

le montrer !!! c'est mieux écrit !

Cherchons $\operatorname{N} f \cap \operatorname{Im} f$:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x = 2\mu \;;\; y = 4\mu \;;\; z = -5\mu \end{cases}$$

insister !

$\forall \vec{v} \in \vec{E}$,

$\vec{v} = \underbrace{\alpha \vec{I} + \beta \vec{J}}_{\in \vec{P}} + \underbrace{\gamma \vec{K}}_{\in \vec{D}}$ $\quad 2\mu - 8\mu + 5\mu = 0 \quad \mapsto \mu = 0$ donc $(x=0 \;;\; y=0 \;;\; z=0)$

$$\operatorname{N} f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$$

Ouf, $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{N} f = E_3$

$\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{N} f$ sont des sous-espaces supplémentaires dans E_3

Nulle part lu! on n'a $\forall \vec{v} \in E_3 / \vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ $\vec{v_1} \in \vec{P} = \mathrm{Im} f$ $\vec{v_2} \in \vec{D} = \mathrm{N} f$

4°/ Nature de f ?

Tout ce que nous avons trouvé permet de dire que :

f est la projection vectorielle sur $\vec{P}$ parallèlement à $\vec{D}$.

avec : $(\vec{P})$: $x - 2y - z = 0$ de direction $\vec{D}$

$$(\vec{D}) : \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 4\mu \\ z = -5\mu \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs invariants par f (of cours) est $\mathrm{Im} f = \vec{P}$.

Remarque : on a bien $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{N} f = \dim \vec{E}_3$

II

1°/

Hypothèse : $a = \dot{k} \in G_n$, et $\exists\, a = \dot{i} \in G_n$ telle que $a \times a = a$

Nous avons : $a \times a = a$

Donc $\dot{i} \times \dot{i} = \dot{k}$ et, d'après la définition de la multi-

$\dot{i}.\dot{i} = \dot{k}$ -plication des classes :

Mais nous savons aussi que $i^2 = (-i)(-i)$ dans $\mathbb{Z}$.

Donc ~~$\exists\, a' \in$~~, on peut écrire :

$$\dot{(-i)}\dot{(-i)} = \dot{k}$$

(1) $\quad \dot{-i}\ \dot{-i} = \dot{k}$ ceci dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans G_n, il

faut que ~~$-i$~~ $\in [0, n-1]$

un entier relatif qui lui sera congru mod n

Or, nous savons que $-i \equiv n - i \ [n]$

oui

(1) devient : $\overline{n-\ell} \times \overline{n-\ell} = \dot{1}$

B et $\overline{n-\ell} \in G_n$.

Donc, tout élément x de G_n qui possède une racine carrée a dans G_n en possède deux et deux seulement (en effet, dans $\mathbb{Z}^{+*}$, et même dans $\mathbb{R}^{+*}$ il n'existe pas de nombres ayant plus de 2 racines carrées).

une 2e déf on est attendue.

non démontré dans G_n !

Si $a = \dot{\ell}$ est racine carrée de $\dot{x} = \dot{k}$,

Alors nécessairement, $a' = \overline{n-\ell}$ est aussi racine carrée de $\dot{x} = \dot{k}$.

Application numérique.

* Dans G_{97}, $\dot{9}$ possède 2 racines carrées, et 2 seulement,

Vu à savoir : $\dot{3}$ et $\overline{97-3} = \overline{94}$

* Dans G_{17}, $\overline{15}$ admet $\dot{7}$ comme racine carrée.

B Il admet aussi la classe : $\overline{17-7} = \dot{10}$ $\quad (\dot{10} \times \dot{10} = \overline{100} = \overline{15})$

B

2°/

$n \geqslant 3$ et n premier

Les racines carrées a et a' de x dans G_n seront confondues si et seulement si $a = a'$

$$\dot{\ell} = \overline{n-\ell}.$$

$$\ell = n - \ell + Q'n \quad , \quad Q' \in \mathbb{Z}.$$

$$\ell = -\ell + Qn \quad \text{avec} \quad Q = Q' + 1 \in \mathbb{Z}$$

Il faudrait et il suffirait donc que :

$$\ell \equiv -\ell \ [n]$$

B

$$2\ell \equiv 0 \ [n] \quad (2)$$

Comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ = corps,

(2) $\vdash$ $\ell \equiv 0 \ [n]$ et : ℓ est multiple de n.

Or $\ell \leq n-1$.

Seul $\dot{0}$ a ses 2 racines carrées confondues : $\dot{0}^2 = \dot{0}$

$\exists\, \ell \in [\![1, n-1]\!] \;/\; \ell \equiv 0\ [n]$.

qui possèdent 1 racine carrée,

"Tous les autres éléments $\dot{x}$ de G_n ont donc des racines carrées distinctes (lorsque l'on a, du moins, $n \geq 3$ et n premier).

P1

Racines carrées éventuelles des éléments de G_2

Les 2 éléments $\{\dot{0}, \dot{1}\}$ de $\overline{G}_2$ admettent chacun 2 racines carrées confondues, à savoir : $\dot{0} \times \dot{0} = \dot{0}$

$\dot{1} \times \dot{1} = \dot{1}$ (en effet : $\overline{n-\ell} = \overline{2-1} = \dot{1}$)

Mieux : revenez à : $2\ell \equiv 0\ [n]$

Ici $2\ell \equiv 0\ [2]$ qui, vrai $\forall \ell \in G_2$.

La restriction précédente est donc justifiée.

3°/

4°/

* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ = corps :

$\dot{2}x^2 + \dot{3}x + \dot{1} = \dot{0}$ (1) ~~Poms $\sqrt{\dot{2}} = \dot{3}$~~

~~$\dot{2}x^2$~~

Comme $(\dot{3}x + \dot{4})^2 = \dot{2}x^2 + \dot{4}^2 + \dot{3}x$ soit

(1) $(\dot{3}x + \dot{4})^2 - \dot{4}^2 + \dot{1} = \dot{0}$

$(\dot{3}x + \dot{4})^2 = \dot{1}$

Ce qui peut s'écrire :

$(\dot{3}x + \dot{4})^2 - \dot{1}^2 = \dot{0}$

$(\dot{3}x + \dot{5})(\dot{3}x + \dot{3}) = \dot{0}$

$\dot{3}(\dot{3}x + \dot{5})(\dot{x} + \dot{1}) = \dot{0}$ ($\leftarrow$ intégrité de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$) $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{5} = \dot{0} \\ \text{ou} \\ \dot{x} + \dot{1} = \dot{0} \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \dot{-4} \\ \text{ou} \\ x = \dot{-1} \end{cases}$ $\quad \boxed{\begin{cases} x = \dot{3} \\ x = \dot{6} \end{cases}}$ Vu

Ce n'est pas exactement la forme souhaitée par l'énoncé mais c'est bien

* (1) : $x(\dot{2}x + \dot{3}) = \dot{6} = \dot{-1}$

Considérons la fonction Ψ : $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$x \longmapsto x(\dot{2}x + \dot{3})$

B Examinons le domaine des valeurs de cette fonction :

Posons $x = \dot{k}$

$k \equiv 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

$2k \equiv 0, 2, 4, 6, -2, -4, -6$

$2k+3 \equiv 3, 5, 0, 2, 1, -1, -3$

$k(2k+3) \equiv 0, 5, 0, \boxed{6}, \boxed{-1}, 2, 2$

6 pour $k \equiv 3$; -1 pour $k \equiv -1$

B

Donc $\begin{cases} x = \dot{3} \\ x = \dot{6} \end{cases}$

5°/

Représentation simple de α

Posons $\alpha = \dot{\alpha}_1$

On a :

$\dot{\alpha}_1 \times \dot{2} = \dot{1}$ comme $\dot{n+1} = \dot{1}$

$\overline{2\alpha_1} = \dot{1}$

donc $2\alpha_1 \equiv 1 \quad [n]$

$2\alpha_1 = 1 + Qn \quad , Q \in \mathbb{Z}$

Prenons, par exemple $Q = 1$, alors $\alpha_1 = \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$

Nous voyons que $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ puisque n étant premier, n est nécessairement impair sauf pour $n = 2$. Donc le cas où $n \neq 2$, $n+1$ est pair et $\alpha_1 \in \mathbb{N}$.

B

B || Si $n = 2$, $\nexists \dot{2}$.

En conclusion, si n est premier et $n \neq 2$, alors :

P2

$\alpha = \left(\overline{\frac{n+1}{2}}\right)$

Application numérique.

* dans G_{97}, $\alpha = \frac{\dot{97}+\dot{1}}{\dot{2}} = \dot{49}$

* dans G_{23}, $\alpha = \frac{\dot{23}+\dot{1}}{\dot{2}} = \dot{12}$

5% 8)

(E) $x^2 + x + \dot{n-2} = \dot{0}$ dans le corps G_n.

Admet-elle les 2 racines apparentes $x' = \dot{1}$ et $x'' = \dot{n-2}$? :

pour x' : (E) $\dot{1} + \dot{1} + \dot{n-2} = \dot{2+n-2} = \dot{n} = \dot{0}$

pour x'' : (E) $\dot{n-2}^2 + \dot{n-2} + \dot{n-2} = \dot{n^2+4-4n} + \dot{2n-4}$

$= \underbrace{\dot{n^2}}_{\dot{0}} - 4\underbrace{\dot{n}}_{\dot{0}} + \dot{4} + \underbrace{\dot{2}\dot{n}}_{\dot{0}} - \dot{4}$

$= \dot{4} - \dot{4}$

$= \dot{0}$

Discriminant réduit : (E) $\Leftrightarrow x^2 + x + \dot{n-2} = \dot{0}$

$\Delta' = \dot{1}^2 - \dot{n-2}$

$= \dot{1-n} = \dot{1}$ puisque $\dot{n} = \dot{0}$

faute regrettable ! $\Delta' = b'^2 - ac$ Qu'est b' ?

D'autre part :

$\alpha^2 = \left(\frac{\dot{n+1}}{\dot{2}}\right)^2 = \frac{\dot{(n+1)^2}}{\dot{4}} = \frac{\dot{n^2+1+2n}}{\dot{4}}$

$\alpha^2 + \dot{2} = \frac{\dot{n^2+1+2n+8}}{\dot{4}} = \frac{\dot{1+8}}{\dot{4}}$ cela ne correspond pas.

dans G_7, $\alpha^2 + \dot{2} = \frac{\dot{1+8+7}}{\dot{4}} = \frac{\dot{16}}{\dot{4}} = \dot{4}$

et $\exists$ (2) et $\dot{n-2} = (5)$

dans G_5, $\alpha^2 + \dot{2} = \dot{1}$

et $\exists$ (1) et $\dot{n-1} = (4)$

III

1°/

$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}$

} fonctions vectorielle de Leibnitz respectivement associées aux points :

$\{A(1) ; B(1) ; C(2) ; D(4)\}$

et $\{A(1) ; B(1) ; C(2) ; D(-4)\}$

Pour f : la somme des coefficients $1 + 1 + 2 + 4 = 8$ n'est pas nulle.

Pour g : la somme des coefficients $1 + 1 + 2 - 4 = 0$ est nulle.

On en déduit que f est une bijection, tandis que g est une application constante.

Soit G le barycentre de $\{A(1), B(1), C(2), D(4)\}$

On a donc :

$\forall O \in E_2$, $\quad \overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OD}}{8}$

Prenons O en M : $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{8} \overrightarrow{g(M)}$

donc $\boxed{\overrightarrow{g(M)} = 8\,\overrightarrow{MG}}$

Forme réduite des images de g.

$\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}$

$= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}) + 2(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD})$

$\boxed{\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}}$

Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{g(M)} = 0$ (1)

(1) $\mapsto$ $8\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}) = 0$ (2)

* Calcul des coordonnées de G :

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OD}}{8}$ $\quad A\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ $\quad B\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ $\quad C\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ $\quad D\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_G = \frac{1}{8}[1(0) + 1(7) + 2(7) + 4(0)] = \frac{21}{8} \\ y_G = \frac{1}{8}[1(4) + 1(4) + 2(0) + 4(0)] = 1 \end{cases}$ $\quad G\begin{pmatrix}\frac{21}{8}\\1\end{pmatrix}$

* Calcul des coordonnées du vecteur $\vec{m} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OD}$

$\vec{m} \begin{vmatrix} 0 + 7 + 14 \\ 4 + 4 \end{vmatrix}$ donc $\vec{m}\begin{pmatrix}21\\8\end{pmatrix}$

Soit K l'extrémité du vecteur $\vec{m}\begin{pmatrix}21\\8\end{pmatrix}$ fixé en G

$\overrightarrow{GK} = \vec{m}$

$\overrightarrow{OK} = \vec{m} + \overrightarrow{OG}$ et $K\begin{cases} x = 21 + \frac{21}{8} = \frac{189}{8} \\ y = 8 + 1 = 9 \end{cases}$

$K\begin{pmatrix}\frac{189}{8}\\9\end{pmatrix}$

*(2) peut s'écrire :

$8\,\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m} = 0$ $\qquad \vec{m}\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}$ $\qquad G\begin{pmatrix}x_G\\y_G\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m} = 0 \longmapsto (x_G - x)\,x_m + (y_G - y)\,y_m = 0$

et, en remplaçant par les valeurs trouvées :

$\left(\frac{21}{8} - x\right)21 + (1 - y)\,8 = 0$

$(21 - 8x)21 + (1-y)\,64 = 0$

$441 - 168x + 64 - 64y = 0$

$168x + 64y - 505 = 0$ (D) ou : $21x + 8y - \frac{505}{8} = 0$

L'ensemble des points est la droite (D) d'équation :

$168x + 64y - 505 = 0$

2°/

Ensemble F_1 des points M tels que $\varphi_1(M) = \overbrace{AB^2 + 2AC^2 + 4AD^2}^{k}$ (1)

φ_1 : fonction scalaire de Leibniz, somme des coefficients non nulle.

$\varphi_1(M) = \varphi_1(G) + 8\,MG^2$

$\varphi_1(A) = \varphi_1(G) + 8\,AG^2$ $\longmapsto MG^2 = AG^2$

(1) $\longmapsto$ $\varphi_1(G) + 8\,MG^2 = k$

$$\varphi_1(G) + 8\,MG^2 = k \qquad (2)$$

$$\varphi_1(G) = GA^2 + GB^2 + 2\,GC^2 + 4\,GD^2$$

$$\vec{GA}^2 = \left(\frac{21}{8}\right)^2 + 3^2 = \frac{441}{64} + 9$$

$$\vec{GB}^2 = \left(7 - \frac{21}{8}\right)^2 + 3^2 = \frac{35^2}{8^2} + 9$$

$$\vec{GC}^2 = \left(7 - \frac{21}{8}\right)^2 + 1 = \frac{35^2}{8^2} + 1$$

$$\vec{GBD}^2 = \left(\frac{21}{8}\right)^2 + 1 = \frac{441}{64} + 1$$

$$\varphi_1(G) = \frac{441}{64} + 9 + \frac{35^2}{8^2} + 9 + \frac{2.35^2}{8^2} + 2 + \frac{4.441}{8^2} + 4$$

$$= 24 + \frac{441 + 3.35^2 + 1764}{8^2}$$

$$\varphi_1(G) = 24 + \frac{441 + 1764 + 3675}{8^2}$$

$$= 24 + \frac{5\,880}{8^2}$$

$$= 24 + \frac{735}{8}$$

$$\varphi_1(G) = 24 + \frac{735}{8} = \frac{927}{8}$$

(2) devient :

$$8\,MG^2 = k - \frac{927}{8} \qquad (3)$$

* Calcul de k

$k = AB^2 + 2AC^2 + 4AD^2$

$=$

$AB^2 = 7^2 + 0^2 = 49$

$AC^2 = 7^2 + 4^2 = 65$

$AD^2 = 0^2 + 4^2 = 16$

$k = 49 + 130 + 64$

$k = 243$

$k = \varphi_1(A)$

* (3) devient $8MG^2 = 243 - \frac{927}{8}$

$\overrightarrow{GM}^2 = \frac{1017}{8^2}$

L'ensemble des points M est donc le cercle (C) pointé en G et de rayon $\frac{1}{8}\sqrt{1017} = R$.

centré

Passe-t-il par A ? Pourquoi ?

$\sqrt{1017} \simeq 3,1.10$ donc $R \simeq 3,9$

Recherche de l'ensemble des points M tels que $\varphi_2(M) = AB^2 + 2AC^2 - 4AD^2$

Dans ce cas, $\exists O \in E_2$ (somme des coefficients est nulle)

$\varphi_2(M) = \varphi_2(O) + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{g}(O)$ $\vec{g}(O)$ étant la fonction vectorielle de Leibniz associée à $\{A(1), B(1), C(2), D(-4)\}$

$\varphi_2(O) = OA^2 + OB^2 + 2OC^2 - 4OD^2$

$= O^2 + 4^2 + 7^2 + 4^2 + 2(7^2 + 0^2) - 4(0^2)$

$= 2.4^2 + 7^2 + 2.7^2$

$= 32 + 147$

$\varphi_2(O) = 179$

Pourquoi ne pas utiliser plutôt $\varphi_2(A)$?

et $\vec{g}(O) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}$ (cf plus haut, les notations ayant changé, voir à $\vec{g}(M)$)

$= \vec{m}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Donc :

$\mathcal{P}_2(M) = 179 + 2\,\vec{MO}\cdot\vec{m}$ $\qquad \vec{m}\begin{pmatrix}21\\8\end{pmatrix}$

et $\mathcal{P}_2(M) = AB^2 + 2AC^2 - 4\,AD^2$.

Donc :

$2\,\vec{MO}\cdot\vec{m} + 179 = AB^2 + 2AC^2 - 4\,AD^2$

Or :

$AB^2 = 7^2 = 49$

$AC^2 = 7^2 + 4^2 = 65$

$AD^2 = 4^2 = 16$

$2\,\vec{MO}\cdot\vec{m} + 179 = 49 + 130 - 64$

$2\,\vec{MO}\cdot\vec{m} = -64$

$\vec{OM}\cdot\vec{m} = 32$

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{m}\begin{pmatrix}21\\8\end{pmatrix}$

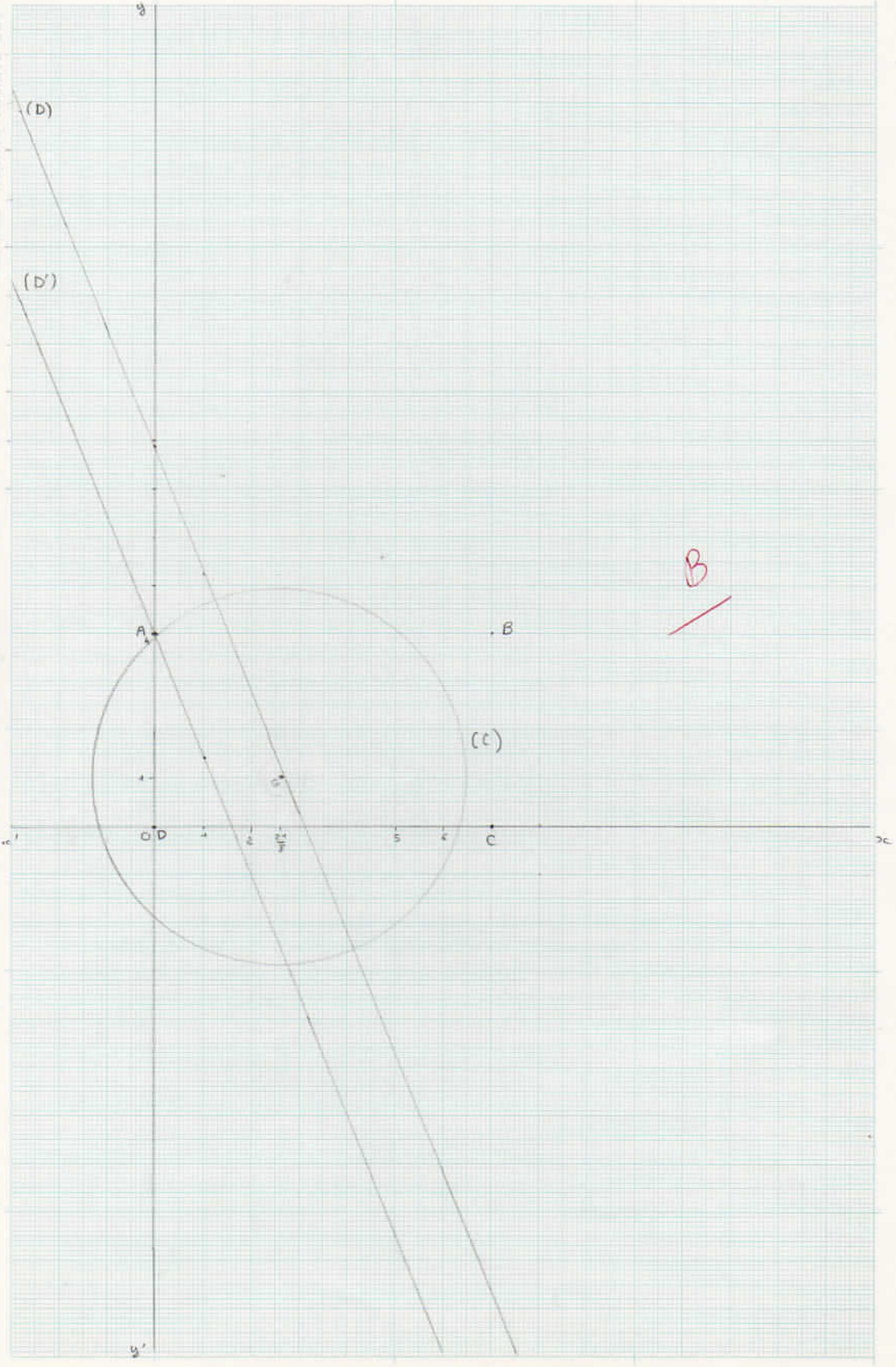
$21x + 8y = 32$

L'ensemble des points M est la droite affine d'équation :

$$21x + 8y - 32 = 0 \qquad (D')$$

Passe-t-elle par A ? Pourquoi ?

Mercier TC2



Terminale C - Devoir pour le jeudi 9 janvier 1975

Exercice. $\mathbb{Z}$ désignant l'ensemble des nombres entiers relatifs, et p un nombre premier donné, on considère l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ dont les éléments sont notés : $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p^2-2}, \overline{p^2-1}$.

1°) La lettre x représente un entier naturel tel que $0 < x < p^2$. Montrer que $\bar{x}$ est "diviseur de zéro" si et seulement si p divise x. Combien l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ a-t-il de diviseurs de zéro ?

2°) Quel est l'ensemble des diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$? Résoudre, dans l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, l'équation : $(\bar{2}X + \bar{5})(X + \bar{4}) = \bar{0}$. En déduire l'ensemble des nombres entiers n pour lesquels : $(2n+5)(n+4)$ est divisible par 9.

Problème. On désigne par E un espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et par $\mathcal{E}$ un esp. affine sur E rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(A). Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices 2×2 telles que $A \in \mathcal{H}$ ssi : $A^2 = 0$ (matrice nulle). (1) Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{H}$ est non inversible. (2) Montrer qu'une matrice A est élément de $\mathcal{H}$ ssi elle est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \det A = 0$$

(3) Soit f un endomorphisme non nul de E dont la matrice A relative à $(\vec{i}, \vec{j})$ est élément de $\mathcal{H}$. a) montrer que le noyau $\mathcal{N}$, ainsi que l'image $\mathcal{I}$ de f sont des droites vectorielles de E. b) Montrer que $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$; en déduire que $\mathcal{I} = \mathcal{N}$.

(4) Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{N}$ non nul, et $\vec{v}$ un vecteur tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base de E; on pose : $f(\vec{v}) = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ (λ, μ réels). Montrer que μ est une constante, qu'on déterminera. Écrire la matrice A' de f relative à $(\vec{u}, \vec{v})$.

(B) Soit maintenant g un endom. de E de la forme : $g = f + Id_E$ où f est un endom. de $\mathcal{E}$ tel que : $f(\vec{i}) = \vec{0}$ et $f(\vec{j}) = \lambda \vec{i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) Déterminer $f^2 = f \circ f$. Calculer $g \circ (Id - f)$. Montrer que g est un automorphisme de E et déterminer g^{-1}.

(2) on désigne par f_λ l'endom. de E défini par $f(\vec{i}) = \vec{0}$ et $f(\vec{j}) = \lambda \vec{i}$ comme ci-dessus, et λ par g_λ l'endom. $f_\lambda + Id_E$. on appelle G l'ens. des endo. g_λ lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$. Quelle est la matrice de g_λ, soit M_λ, relative à $(\vec{i}, \vec{j})$? Déterminer l'endom. $g_\lambda \circ g_\mu$: conclure à propos de G. Trouver que l'appl. $\lambda \longmapsto g_\lambda$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(G, \circ)$. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe commutatif.

(C) Soit $h_{\lambda,a}$ l'application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, au point M de coord. x, y dans le rep $(O, \vec{i}, \vec{j})$ fait corresp. M' de coord. x', y' telles que : $x' = x + \lambda y + a$; $y' = y$. (λ, a paramètres réels). Montrer que $h_{\lambda,a}$ est une bijection. Déterminer suivant les val. de λ et a l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par $h_{\lambda,a}$. Écrire $h_{\lambda,a}$ comme composée ($t \circ u$) d'une application affine u ayant O comme point double et d'une translation t de direction $\vec{i}$. Ce "produit" est-il commutatif ? Déterminer la composée $h_{\lambda,0} \circ h_{\mu,0}$ des applications $h_{\lambda,0}$ et $h_{\mu,0}$; puis montrer que :

$$h_{\lambda,a} \circ h_{\mu,b} = h_{\lambda+\mu,\, a+b}.$$

Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des applications affines $h_{\lambda,a}$, muni de la loi $\circ$, est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^2, +)$.

NB : veiller à la présentation et à la rédaction

Mercier Dany-Jack
TC2

Jeudi 9 janvier 1975

16/20
TB pour le problème (démontrer cependant que h est affine)

Devoir de mathématique.

I 1%

Soient les nombres $\bar{x}$ et $\bar{y}$ diviseurs de $\bar{0}$.

Nous pourrons écrire :

$\bar{x}.\bar{y} = \bar{0} \vdash xy = k p^2$ (car nous sommes dans l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$)

$\vdash p^2 | xy$

Il faut démontrer que $p^2|xy \vdash \begin{cases} p^2|x \\ \text{ou} \\ p^2|y \\ \text{ou} \\ p|x \text{ et } p|y \end{cases}$

$* \begin{cases} p^2|x \\ \text{ou} \\ p^2|y \\ \text{ou} \\ p|x \text{ et } p|y \end{cases} \vdash p^2|xy$ (1)

en effet, si $p^2|x$, alors $p^2|xy$ (| est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$, et nous utilisons ici la transitivité de cette relation d'ordre)

si $p^2|y$, alors $p^2|xy$

si $p|x$ et $p|y$, alors il existe k et k' entiers naturels tels que $x = kp$ et $y = k'p$. Donc $xy = kk'p^2$

$xy = k''p^2$ en posant $k'' = kk' \in \mathbb{N}$

(1) est donc démontrée.

$* \quad p^2|xy \vdash \begin{cases} p^2|x \\ \text{ou} \\ p^2|y \\ \text{ou} \\ p|x \text{ et } p|y \end{cases}$ (2)

En effet : $\exists k \in \mathbb{N}$ /

$xy = kp^2 \vdash p|xy$ et p premier $\vdash p|x$ ou $p|y$ (3)

alors si $p|x$, ce qui ne restreint pas la généralité, nous avons :

$\exists k' \in \mathbb{N} \;/\; x = k'p$

Comme déjà $xy = kp^2$, alors $k'py = kp^2$

$k'y = kp$

p est premier. On sait que tout nombre premier divisant un produit divise nécessairement l'un des facteurs de ce produit. Ici p divise $k'y$.

Donc $p \mid k'$ ou $p \mid y$.

Si $p \mid k' \;\mapsto\; \exists q \in \mathbb{N} \;/\; k' = q \cdot p$ et $x = k'p$.

$x = q\,p^2 \;\mapsto\; p^2 \mid x$.

Si $p \mid y$, comme déjà $p \mid x$, on a la conclusion $p \mid x$ et $p \mid y$

Le raisonnement est analogue si $p \mid y$ est choisi en (3). En effet, les lettres x et y occupent dans le produit xy des places symétriques. Dans ce second développement, on trouverait un cas nouveau, celui où $p^2 \mid y$.

(2) est donc démontrée.

B

En conclusion :

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0} \;\mapsto\; \begin{cases} p^2 \mid x \\ \text{ou} \\ p^2 \mid y \\ \text{ou} \\ p \mid x \text{ et } p \mid y \end{cases}$$

Mais ici, nous avons de plus la condition $0 < x < p^2$ et $0 < y < p^2$, ce qui est incompatible avec le fait que $p^2 \mid x$ et celui que $p^2 \mid y$.

Ici donc :

$$\boxed{\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0} \;\mapsto\; p \mid x \text{ et } p \mid y}$$

Donc $\bar{x}$ est diviseur de zéro si et seulement si p divise x.

Nombre des diviseurs de $\bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$

Il y en a autant que de nombres multiples de p appartenant à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

$\bar{0}$ $\bar{1}$ $\bar{2}$ ... $\bar{p}$ .... $\overline{p^2-1}$.

à revoir

X

ne pas compter $\bar{0}$

Dans la liste des éléments de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, les multiples de p sont les

suivants :

$\bar{0}$ $\bar{p}$ $\overline{2p}$ $\overline{3p}$ ... $\overline{ap}$ $\quad a \in \mathbb{N}$

et $\quad ap < p^2$

$a < p \qquad p$ positif

$a \leqslant p-1$

Cette liste est donc :

$\underbrace{\bar{0}\ \bar{p}\ \overline{2p}\ \ldots\ \overline{(p-1)p}}_{p \text{ termes}}$, donc | p diviseurs de $\bar{0}$ |

et p-1 sont $\neq \bar{0}$

2°/

Dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, $p = 3$. Il y aura donc 3 diviseurs de $\bar{0}$. En effet :

$\bar{0}$ $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{5}$ $\bar{6}$ $\bar{7}$ $\bar{8}$

① ② ③

B

Résolution de $(\bar{2}X + \bar{5})(X + \bar{4}) = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

Posons $X + \bar{4} = \bar{A}$ et $\bar{2}X + \bar{5} = \bar{B}$.

Donc $\bar{B} \cdot \bar{A} = \bar{0}$

Chaque nombre $\bar{B}$ et $\bar{A}$ est un diviseur de $\bar{0}$. C'est donc l'un des nombres de l'ensemble $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$

Il y a $3^2 = 3 \times 3 = 9$ possibilités.

On peut avoir :

$\bar{A} = \bar{0}$? $\bar{B} = \bar{0}$ ou $\bar{3}$ ou $\bar{6}$

$\bar{A} = \bar{3}$? $\bar{B} = \bar{0}$ ou $\bar{3}$ ou $\bar{6}$

$\bar{A} = \bar{6}$? $\bar{B} = \bar{0}$ ou $\bar{3}$ ou $\bar{6}$

1°/ $\bar{A} = \bar{0}$

2°/ $\bar{B} = \bar{0}$

3°/ $\begin{cases} \bar{A} = \bar{3} \\ \bar{B} = \bar{3} \end{cases}$

4°/ $\begin{cases} \bar{A} = \bar{3} \\ \bar{B} = \bar{6} \end{cases}$

5°/ $\begin{cases} \bar{A} = \bar{6} \\ \bar{B} = \bar{6} \end{cases}$

6°/ $\begin{cases} \bar{A} = \bar{6} \\ \bar{B} = \bar{3} \end{cases}$

On ne voit nullement de (et) ni de (ou)

d'où :

1) $X + \bar{4} = \bar{0} \vdash X = \bar{5}$ alors $\bar{B} = \bar{2}.\bar{5} + \bar{5}$

$= \bar{6}$ valable.

2) $X + \bar{4} = \bar{3} \vdash X = \bar{8}$ alors $\bar{B} = \bar{2}.\bar{8} + \bar{5}$

$\bar{B} = \bar{3}$ valable.

3) $X + \bar{4} = \bar{6} \vdash X = \bar{2}$ alors $\bar{B} = \bar{2}.\bar{2} + \bar{5} = \bar{0}$ valable.

Peu net car on ne voit pas : $\bar{A} \times \bar{B} = \bar{0}$

Le montrer chaque fois

Comment savez-vous qu'il n'y a pas d'autre solutions que les 3 trouvées ci-dessus ?

L'ensemble S des solutions est, en extension : $S = \{\bar{2}, \bar{5}, \bar{8}\}$

Application

$n \in \mathbb{N}$, $(2n+5)(n+4)$ divisible par 9 $\vdash\!\dashv$ $(2n+5)(n+4) \equiv 0$ [9]

$\vdash\!\dashv$ $(\bar{2}\bar{n}+\bar{5})(\bar{n}+\bar{4}) = \bar{0}$

$\vdash\!\dashv$ $\bar{n} \in S = \{\bar{2}, \bar{5}, \bar{8}\}$

$\vdash\!\dashv$ $n \equiv 2, 5, 8$ [9]

Donc :

$$n = 2 + 9k$$
$$\text{ou } n = 5 + 9k \; ; \; \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\text{ou } n = 8 + 9k$$

TB

II Ⓐ

Dans toute la suite du problème, nous désignerons par ω la matrice nulle $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\mathcal{A}$ = ensemble des matrices A telles que $A^2 = \omega$

1° Toute matrice $A \in \mathcal{A}$ est non inversible.

$A \in \mathcal{A} \vdash\!\dashv A^2 = \omega$

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une matrice de $\mathcal{A}$ qui soit inversible. Il existe donc la matrice A^{-1} telle que : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, où I désigne la matrice unité $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Alors, ici : $A^2 = \omega \vdash\!\dashv A \times A = \omega \vdash\!\dashv (A^{-1} \times A) \times A = A^{-1}\omega$

(associativité de x)

ω étant l'élément absorbant, $IA = \omega \vdash\!\dashv A = \omega$.

Comme A est supposée régulière et que ω n'est pas inversible, il apparaît que l'égalité $A = \omega$ est absurde. Nous pourrons affirmer que toute matrice $A \in \mathcal{A}$ est singulière.

parlez d'incompatibilité

2/ $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $\det A = 0$?

Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $A \in \mathcal{K}$.

Donc :

$$A \times A = \omega$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{cases} a^2+bc = 0 & (1) \\ (a+d)\,b = 0 & (2) \\ (a+d)\,c = 0 & (3) \\ bc+d^2 = 0 & (4) \end{cases} \quad (I)$$

De (1) et (4) l'on tire : $\begin{cases} a^2+bc = 0 \\ \underline{bc = -d^2} \end{cases}$

$$a^2 - d^2 = 0$$

$$(I) \mapsto \begin{cases} a^2+bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ (a-d)(a+d) = 0 \end{cases}$$

Distinguons deux cas :

α) Si $a+d=0 \mapsto a = -d \mapsto d = -a$

alors il faut que $a^2 + bc = 0$

L'ensemble des matrices appartenant à ce cas est celui des matrices $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $\det A = -a^2 - bc = -(a^2+bc) = 0$

β) Si $a+d \neq 0$

alors $(I) \mapsto \left\{ \begin{matrix} b=c=a-d=0 \\ a^2+bc=0 \end{matrix} \right\} \mapsto \left\{ \begin{matrix} a=b=c=0 \\ a=d \end{matrix} \right\} \mapsto a=b=c=d=0$

On obtient la matrice ω qui est encore de la forme α)

En conclusion, $A \in \mathcal{K} \mapsto A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $\det A = 0$

Remarque

Le fait que $\det A = 0$ est en accord avec celui que la matrice A soit non-inversible.

3°/

a) Noyau $\mathcal{N}$ de f

$\mathcal{N} = \{ \vec{u}, \vec{u} \in E \ / \ f(\vec{u}) = \vec{0} \}$.

Si $\vec{u}\ (x, y)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$ (II)

et $\det A = D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & -a \end{vmatrix} = 0$

Le système (II) admet donc une infinité de solutions (la solution $x=0$ et $y=0$ étant évidente, le système n'est pas impossible).

$\mathcal{N}$ est donc inclus dans la droite vectorielle $\vec{D}$ d'équation cartésienne $ax + cy = 0$ (ou $bx - ay = 0$)

$\mathcal{N} \subset \vec{D}$

TB Comme, de plus, $\mathcal{N} \neq \{\vec{0}\}$ car $\vec{v_1}\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$, alors nous pouvons affirmer que $\mathcal{N} = \vec{D}$

$\mathcal{N}$ = droite vectorielle d'équation $ax + cy = 0$ (ou $bx - ay = 0$)

Remarque

Dans (II), les coefficients a, c ; $b, (-a)$, sont respectivement proportionnels.

$\exists k \in \mathbb{R} \ / \ a = kb$ et $c = k(-a)$.

Donc, si $b = 0$, la condition $a^2 + bc = 0$ implique que $a = 0$. Alors $c = k(-a)$ devient $c = 0$. Nous avons $b = a = c = 0$. f est l'endomorphisme nul $= \tilde{0}$

B interdit par l'énoncé. Dans ce cas l'équation $ax + cy = 0$ devient $0x + 0y = 0$ qui n'est plus l'équation d'une droite. Le noyau de $\tilde{0}$ est tout l'espace vectoriel E.

Image de f : $\mathcal{I}$.

C'est une droite vectorielle car : $\dim \mathcal{I} = \dim E - \dim \mathcal{N}$

$\dim \mathcal{I} = 2 - 1 = 1$

Vu

Déterminons cette droite vectorielle $\mathcal{I}$: $\forall \vec{v}(x',y') \in \mathcal{I}, \exists (x,y) / \begin{cases} ax+cy=x' \\ bx-ay=y' \end{cases}$

* si $c \neq 0$, $y = \frac{1}{c}(x'-ax)$

d'où $bx - \frac{a}{c}(x'-ax) = y'$

$bcx - ax' + a^2x = cy'$

$x(a^2+bc) = ax'+cy'$

$0x = ax'+cy'$ car $a^2+bc=0$

Il faut qu'il existe x et y, donc que $ax'+cy'=0$.

Vu

$\mathcal{I}$ = droite vectorielle d'équation cartésienne $ax+cy=0$.

* si $c=0$, ~~b=0~~ alors $a^2+bc=0 \vdash a=0$

Le système devient : $\begin{cases} 0x+0y=x' \\ bx+0y=y' \end{cases}$

ω désigne une matrice

$b \neq 0$ car autrement ~~$f=\omega$~~ $f=\tilde{0}$.

Donc $\exists x$: $x = \frac{1}{b}y'$.

$\vec{u} \in \mathcal{I} \vdash \vec{u} = y'\vec{j} = bx\vec{j}$

$\mathcal{I}$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{j}$, donc d'équation cartésienne $x=0$. On aurait pu retrouver cette équation en faisant $a=0$ dans $bx-ay=0$: $bx=0 \vdash x=0$ (car $b \neq 0$)

b) $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$?

Il existe un isomorphisme de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ sur $(\mathcal{M}_2, +, \times)$, $\mathcal{M}_2$ désignant l'ensemble des matrices carrées 2-2.

Comme ici $A \times A = \omega$

nous avons aussi $f \circ f = \tilde{0}$, $\tilde{0}$ désignant l'endomorphisme nul

Ceci dit :

$\forall \vec{v} \in \mathcal{I}$, $\exists \vec{z} \in E$ / $\vec{v} = f(\vec{z})$

et : $f(\vec{v}) = f[f(\vec{z})] = f \circ f(\vec{z}) = \tilde{0}(\vec{z}) = \vec{0} \vdash \vec{v} \in \mathcal{N}$

TB

Donc $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$.

$\underline{\mathcal{I} = \mathcal{N}}$

$\mathcal{I}$ et $\mathcal{N}$ sont des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

B

$\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$ et $\dim \mathcal{N} = \dim \mathcal{I}$.

De ces considérations, il apparait que $\mathcal{I} = \mathcal{N}$.

4°/

$\vec{u} \in \mathcal{N}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$

inutile ! $\vec{v} \neq \vec{0}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base de E. oui, suffit

$f(\vec{v}) = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

μ = constante ?

Nous avons : $f(\vec{v}) = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

$f \circ f(\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$ comme $f \circ f = \tilde{0}$

$\tilde{0}(\vec{v}) = \vec{0} + \mu f(\vec{v})$ et $\vec{u} \in \mathcal{N}$

$\mu f(\vec{v}) = \vec{0}$ (5)

TB Or, $f(\vec{v}) \neq \vec{0}$ car $\vec{v} \notin \mathcal{N}$: $\mathcal{N}$ est une droite vectorielle et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de cette droite ne seraient évidemment pas indépendants. (5) $\mapsto \mu = 0$

$$\boxed{f(\vec{v}) = \lambda \vec{u}}$$

D'où

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{0} \\ f(\vec{v}) = \lambda \vec{u} \end{cases} \qquad A' = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$

$A'(f, \vec{u}, \vec{v})$.

X

(B)

$g = f + Id_E$

f a pour matrice $\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$f^2 = f \circ f$ a pour matrice $\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Donc $f^2 = \tilde{0}$

Calcul de $g \circ (Id_E - f)$

B $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ a une structure d'anneau unitaire non commutatif.

$$g \circ (Id_E - f) = (f + Id_E) \circ (Id_E - f)$$
$$(f + Id_E) \circ Id_E + (f + Id_E) \circ (-f)$$
$$f + Id_E - f^2 - f \qquad \text{comme } f^2 = \tilde{0}$$
$$= Id_E$$

On peut prévoir que $g^{-1} = Id_E - f$.

Il faut aussi que $g^{-1} \circ g = Id_E$.

$$(Id_E - f) \circ (Id_E + f) = Id_E - f + (Id_E - f) \circ f$$
$$= Id_E - f + f - \tilde{0}$$
$$= Id_E \qquad \text{oui.}$$

Donc $g^{-1} = Id_E - f$ et g est bijective.

2°/

Matrice M_λ de g_λ relative à $(\vec{i}, \vec{j})$

f_λ a pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $H_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$g_\lambda = f_\lambda + Id_E$

B Donc $M_\lambda = H_\lambda + I$

$$M_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Détermination de l'endomorphisme $g_\lambda \circ g_\mu$

$g_\lambda \circ g_\mu$ a pour matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda+\mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous constatons que $g_\lambda \circ g_\mu \in G$, G = ensemble des endomorphismes g_λ

et que $g_\lambda \circ g_\mu = g_{\lambda+\mu}$

Nous concluons ~~de~~ 2 choses au sujet de G : * La loi $\circ$ est interne et

partout définie dans G d'une part.

* la loi ∘ est commutative dans G (ce qui est remarquable) :

en effet, $g_\lambda \circ g_\mu = g_{\lambda+\mu} = g_{\mu+\lambda} = g_\mu \circ g_\lambda$

Avant de démontrer l'~~end.~~ isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(G, \circ)$, démontrons que $(G, \circ)$ est bien un groupe commutatif.

(G, ∘) = groupe commutatif ?

* commutativité : voir question précédente.
* associativité : la loi ∘ est toujours associative.
* élément neutre : pour $\lambda = 0$, on obtient $\begin{cases} f_0(\vec{i}) = \vec{0} \\ f_0(\vec{j}) = \vec{0} \end{cases}$ donc $f_0 = \tilde{0}$

et donc $g_0 = f_0 + Id_E$

$g_0 = Id_E$

$g_0 = Id_E \in G$ et c'est l'élément neutre pour l'opération ∘.

* élément symétrique d'un élément donné g_λ : dans la question 1°/, nous avons déjà montrer que g_λ était bijective et que l'automorphisme réciproque de g_λ était $g_\lambda^{-1} = Id_E - f_\lambda$.

oh!

Oui, (G, ∘) = groupe commutatif

isomorphisme Ψ

$$\begin{aligned} \Psi : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (G, \circ) \\ \lambda &\longmapsto g_\lambda \\ \mu &\longmapsto g_\mu \\ \lambda + \mu &\longmapsto g_{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

et nous avons vu plus haut que $g_{\lambda+\mu} = g_\lambda \circ g_\mu$

donc $\Psi(\lambda + \mu) = \Psi(\lambda) \circ \Psi(\mu)$

Ψ définit un homomorphisme de groupes.

De plus, Ψ est manifestement bijective. Chaque endomorphisme g_λ possède un et un seul antécédent λ. Donc Ψ est un isomorphisme de

B

groupes.

h affine ? Le montrer

© $h_{\lambda,a} : \begin{cases} x' = x + \lambda y + a \\ y' = y \end{cases}$ (I)

Démontrons que $h_{\lambda,a}$ est une bijection.

Pour le démontrer, il suffit de mettre en évidence l'application réciproque $h^{-1}_{\lambda,a}$.

Grâce à (I), exprimons x et y en fonction de x', y', λ et a.

$$\begin{cases} x = x' - \lambda y' - a \\ y = y' \end{cases} \quad \text{(II)}$$

En changeant les lettres primées avec celles qui ne le sont point,

B
$$\begin{cases} x' = x - \lambda y - a \\ y' = y \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Le système (II) définit l'application réciproque de $h_{\lambda,a}$. Donc $h_{\lambda,a}$ en admet une. C'est donc une bijection.

Remarque

On aurait pu dire que l'application linéaire associée à $h_{\lambda,a}$ était une bijection, puis démontrer que cela impliquait que $h_{\lambda,a}$ le soit aussi.

Ensemble des points invariants dans $\mathcal{E}$

$M(x,y) \in \mathcal{E}$ est invariant si et seulement si :

$$\begin{cases} x = x + \lambda y + a \\ y = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \lambda y + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda y = -a \quad (1)$$

* si $\lambda \neq 0$, $y = -\frac{a}{\lambda}$ et y fixé. Cela quel que soit x réel.

L'ensemble (Inv) des points invariants sera inclus dans la droite d'équation : $y = -\frac{a}{\lambda}$. Comme nous avons procédé par équivalences, (Inv) = droite d'équation $y = -\frac{a}{\lambda}$

* Si $\lambda = 0$ (1) : $0_y = -a$

- si $a \neq 0$, $\nexists$ points invariants $(Inv) = \emptyset$
- si $a = 0$, $\exists$ infinité de points invariants. $(Inv) = \mathcal{E}$. Dans ce cas l'application affine $h_{0,0}$ est l'identité du plan affine. Ceci est normal : • pour $\lambda = 0$, on obtient Id_E pour endomorphisme associé, et, avec $a = 0$, O est transformé en O. Donc $h_{0,0} = Id_{\mathcal{E}}$

B

$\underline{h_{\lambda,a} = t \circ u}$

u : application affine ayant O comme point double.

t : translation ponctuelle de direction $\vec{i}$.

Soient : $u : \begin{cases} x_1 = x + \lambda y \\ y_1 = y \end{cases}$

Et t : c'est la translation de vecteur $\vec{u} = a\vec{i}$

donc $\overrightarrow{MM'} = a\vec{i}$

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + a\vec{i}$

$t : \begin{cases} x_2 = x + a \\ y_2 = y \end{cases}$

En effet :

$M' = h_{\lambda,a}(M)$ avec $M'(x', y')$ et $M(x, y)$,

$\begin{cases} x' = x_1 + a = x + \lambda y + a \\ y' = y_1 = y \end{cases}$

$\underline{\text{"Produit" commutatif ?}}$

$u \circ t = h_{\lambda,a}$? $M(x, y) \overset{t}{\mapsto} M'(x'; y') \overset{u}{\mapsto} M''(x''; y'')$

$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y \end{cases}$ $\begin{cases} x'' = x' + \lambda y' = x + a + \lambda y \\ y'' = y' = y \end{cases}$

B

oui, ce "produit" est commutatif.

Détermination de $h_{\lambda,0} \circ h_{\mu,0}$

$M(x,y) \overset{h_{\mu,0}}{\longmapsto} M'(x',y') \overset{h_{\lambda,0}}{\longmapsto} M''(x'',y'')$

tels que :

$$\begin{cases} x' = x + \mu y \\ y' = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = x' + \lambda y' \\ y'' = y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = x + (\lambda + \mu) y \\ y'' = y \end{cases}$$

Donc :

$$h_{\lambda,0} \circ h_{\mu,0} = h_{\mu+\lambda,0}$$

Calcul de $h_{\lambda,a} \circ h_{\mu,b}$

$M(x,y) \overset{h_{\mu,b}}{\longmapsto} M'(x',y') \overset{h_{\lambda,a}}{\longmapsto} M''(x'',y'')$

$$\begin{cases} x' = x + \mu y + b \\ y' = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = x' + \lambda y' + a \\ y'' = y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = x + (\lambda+\mu) y + (a+b) \\ y'' = y \end{cases}$$

Donc $\boxed{h_{\lambda,a} \circ h_{\mu,b} = h_{\lambda+\mu,\, a+b}}$

$(\mathcal{H}, \circ)$ = groupe commutatif ?

$\circ$ est interne et partout définie (voir question précédente).

* commutativité.

Elle est évidente : $h_{\lambda,a} \circ h_{\mu,b} = h_{\lambda+\mu,\, a+b} = h_{\mu+\lambda,\, b+a} = h_{\mu,b} \circ h_{\lambda,a}$

* associativité : $\circ$ est toujours associative.

* Élément neutre.

$Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{H}$? $Id_{\mathbb{R}} : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ oui, $Id_{\mathbb{R}} = h_{0,0} \in \mathcal{H}$

* Chaque élément $h_{\lambda,a}$ admet un "élément" symétrique : c'est la

fonction réciproque $h_{\lambda,a}^{-1}$ définie par : $\begin{cases} x' = x - \lambda y - a \\ y' = y \end{cases}$

donc $h_{\lambda,a}^{-1} = h_{-\lambda,-a} \in \mathcal{H}$

En conclusion, $(\mathcal{H}, \circ)$ = groupe commutatif

Isomorphisme Γ

$$\Gamma : (\mathbb{R}^2, +) \longrightarrow (\mathcal{H}, \circ)$$
$$q_1 = (\lambda, a) \longmapsto h_{\lambda,a}$$
$$q_2 = (\mu, \beta) \longmapsto h_{\mu,\beta}$$
$$q_1 + q_2 = (\lambda+\mu, a+\beta) \longmapsto h_{\lambda+\mu, a+\beta} = h_{\lambda,a} \circ h_{\mu,\beta}$$ (voir question précédente)

Donc $\Gamma(q_1 + q_2) = \Gamma(q_1) \circ \Gamma(q_2)$

De plus, Γ est manifestement bijective.

Γ est donc encore un isomorphisme de groupes.

Mercier Dany-Zack
TC2

Jeudi 23 janvier 1975

B 17/20

Mathématique

I oubli du mot "affine"
II oubli du cas $b = c$
III vous étiez près du but.

(I)

$$f : \begin{cases} x' = 5x + 6y - 2 \\ y' = -4x - 5y + 2 \end{cases}$$

f est une involution affine.

Faisons $f \circ f(M)$, de coordonnées (x'', y'') :

$$\begin{cases} x'' = 5x' + 6y' - 2 = 5(5x + 6y - 2) + 6(-4x - 5y + 2) - 2 \\ y'' = -4x' - 5y' + 2 = -4(5x + 6y - 2) - 5(-4x - 5y + 2) + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases}$$

affine ?

Donc $f \circ f = Id_E \longmapsto f$ = symétrie affine.

Base de f

C'est l'ensemble des points invariants par f :

$$M(x, y) \in \text{base de } f \longmapsto \begin{cases} 5x + 6y - 2 = x \\ -4x - 5y + 2 = y \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} 4x + 6y - 2 = 0 \\ -4x - 6y + 2 = 0 \end{cases}\right\} \longmapsto 2x + 3y - 1 = 0$$

Nous avons procédé par équivalence.

Donc base de f = droite affine $(D) : 2x + 3y - 1 = 0$

(D) passe par le point $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et a pour vecteur directeur

le vecteur $\vec{e}_1$ $(-3, 2)$.

(D) : $2x + 3y - 1 = 0$

Direction de f

Soit F l'endomorphisme de $\vec{E}$ associé à f. La direction de f est l'ensemble des vecteurs de $\vec{E}$ transformés en leur opposé par F.

$$F : \begin{cases} x' = 5x + 6y \\ y' = -4x - 5y \end{cases}$$

$\vec{u}(x, y) \in$ direction de f $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 6x + 6y = 0 \\ -4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$.

La direction de f est la droite vectorielle $\vec{D}'$: $x + y = 0$, de vecteur directeur $\vec{u}(1, -1)$

2°/ Projection p sur (D) parallèlement à $\vec{D}'$

On obtiendra les formules demandées en écrivant que, si $M' = p(M)$

* $M' \in (D)$
* $\overrightarrow{MM'} \in \vec{D}'$

Si $M'(x', y')$ et $M(x, y)$:

$$\begin{cases} 2x' + 3y' - 1 = 0 \quad (1) \\ (x' - x) + (y' - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y' = -x' + x + y$$

$(1) \Leftarrow 2x' - 3x' + 3x + 3y - 1 = 0$

$x' = 3x + 3y - 1$

et $y' = -3x - 3y + 1 + x + y =$

$y' = -2x - 2y + 1$

donc

$$p : \begin{cases} x' = 3x + 3y - 1 \\ y' = -2x - 2y + 1 \end{cases}$$

(II) Dans $\mathbb{C}$:

$$x^2 - (2a - b - c)x + a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = 0 \qquad (1)$$

$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\Delta = (2a - b - c)^2 - 4a^2 - 4b^2 - 4c^2 + 4bc + 4ca + 4ab = 0$$

$$= 4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac + 2bc - 4a^2 - 4b^2 - 4c^2 + 4bc + 4ca + 4ab = 0$$

$$\Delta = b^2 + c^2 + 2bc - 4b^2 - 4c^2 + 4bc$$

$$= -3b^2 - 3c^2 + 6bc$$

$$= -3(b^2 + c^2 - 2bc)$$

$$= -3\underbrace{(b - c)^2}_{\geqslant 0}$$

donc $\Delta \in \mathbb{R}$.

et $\Delta \leqslant 0$

On peut écrire $\Delta = 3(b-c)^2 i^2 = \left(i\sqrt{3} \cdot |b - c|\right)^2$

D'où les racines x' et x'' de (1) :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2a - b - c - i|b-c|\sqrt{3}}{2} \\ x'' = \dfrac{2a - b - c + i|b-c|\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On sait que les racines cubiques de l'unité sont :

$$1 \quad ; \quad j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \bar{j} = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1°/ Cas où $b > c$

* Alors $2x' = 2a - b - c - i(b-c)\sqrt{3}$

$$= 2a - b(1 + i\sqrt{3}) - c(1 - i\sqrt{3})$$

$$2x' = 2a + b(-1 - i\sqrt{3}) + c(-1 + i\sqrt{3})$$

$$x' = a + b\underbrace{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{j^2} + c\underbrace{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{j}$$

$$x' = a(1) + c\,j + b\,j^2 \qquad (2)$$

* De même :

$$2x'' = 2a - b - c + i b\sqrt{3} - i c\sqrt{3}$$

$$2x'' = 2a + b\left(-1 + i\sqrt{3}\right) + c\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$$

$$x'' = a.1 + b\,j + c\,j^2 \qquad (3)$$

2°/ Cas où $c > b$, alors $|b - c| = c - b$

et :

* $2x' = 2a - b - c - i(c - b)\sqrt{3}$

$$2x' = 2a + b\left(-1 + i\sqrt{3}\right) + c\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$$

$$x'' = a(1) + b\,j + c\,j^2 \qquad (4)$$

* et :

$$2x'' = 2a - b - c + i(c - b)\sqrt{3}$$

$$= 2a - b - c + i c\sqrt{3} - i b\sqrt{3}$$

$$2x'' = 2a + b\left(-1 - i\sqrt{3}\right) + c\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$x'' = a(1) + b\,j^2 + c\,j \qquad (5)$$

et le cas c ou $b = c$?

(III) Soient, dans le plan de Cauchy :

M d'affixe $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$

1°/

θ parcourt $[0, 2\pi]$.

Nous avons :

$|z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

donc $\|\overrightarrow{OM}\| = 1$ et M se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 1. C'est le cercle trigonométrique que nous noterons $(\mathcal{U})$.

Vu

De plus, $\arg z \equiv \theta \quad [2\pi]$

donc mes. angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta \quad [2\pi]$ (1)

Comme θ décrit $[0, 2\pi[$, toutes les classes d'angles $\dot{\theta}$ sont représentées (modulo 2π)

B

(1) peu

~~L'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ varie donc "n'importe comment".~~ impropre

L'ensemble des points M est le cercle trigonométrique $(\mathcal{U})$.

B

2°/

$$z' = \left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \qquad (2)$$

Nous voyons que (2) "ressemble" à la forme trigonométrique d'un nombre complexe. Cependant cette "ressemblance" nous conduit à étudier le signe de $\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

B

Etude du signe de $A = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$, $x \in [0, 2\pi[$

Factorisons l'expression donnée.

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$,

$$A = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

Comme $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$, ici :

$$A = 2\cos\left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}}{2}\right)$$

$$A = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} \quad \text{. Comme } \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0,$$

$$A = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Sgn } A = \text{Sgn}\left[\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Posons $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = X$

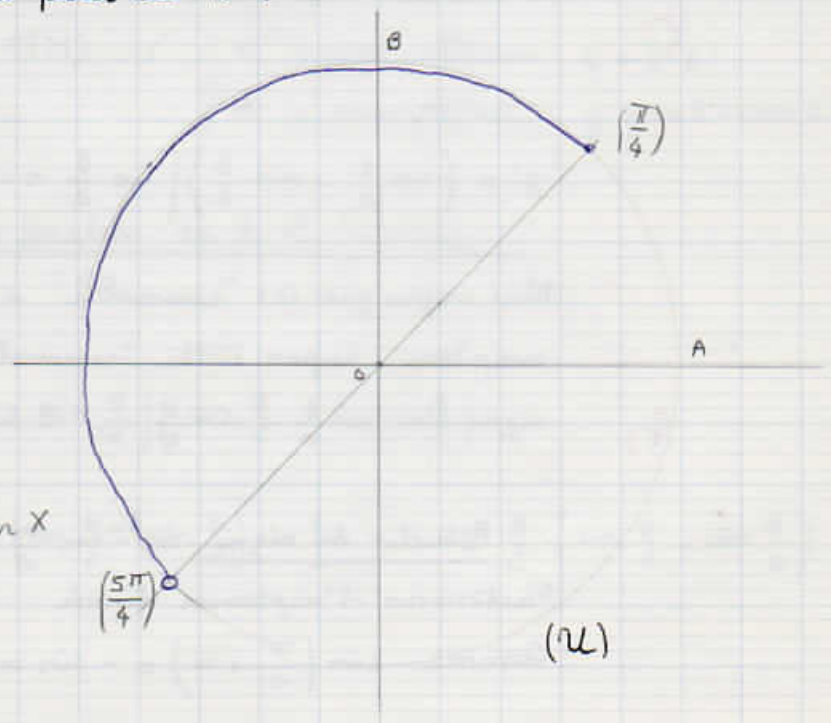
$$\cos\underbrace{\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}_{X}$$

Quelle est la restriction à porter sur X ?

$$0 \leq x < 2\pi$$
$$0 \leq \frac{x}{2} < \pi$$
$$\frac{\pi}{4} \leq X < \frac{5\pi}{4}$$

Voyons le cercle (C).

Nous constatons que :



(C)

$\cos X > 0 \quad \mapsto \quad \frac{\pi}{4} \leq X < \frac{\pi}{2}$ (3)

$\cos X < 0 \quad \mapsto \quad \frac{\pi}{2} < X < \frac{5\pi}{4}$ (4)

impropre !

Le cas où $\cos X = 0$ est ~~dénué d'intérêt~~. En effet, dans ce cas, nous aurions $A = 0$

la preuve !

Donc $z' = 0$, nombre complexe dont l'argument est indéterminé. et son module est nul

Nous n'envisagerons donc plus le cas où $\cos X = 0$.

(3) : $\frac{\pi}{2}$ $\operatorname{Sgn} A = + \quad \mapsto \quad \frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$\mapsto \quad 0 \leq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$

$\mapsto \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

Remarque :
$\arg z'$ = somme des arg d'un réel et de $\frac{\theta}{2}$
réel positif : arg = 0
réel négatif arg $\equiv \pi$ [2π]

(4) : $\operatorname{Sgn} A = - \quad \mapsto \quad \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$

B

$\mapsto \quad \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \pi$

$\mapsto \quad \frac{\pi}{2} < x < 2\pi$

Retour sur z'

Soit $x = \theta$

De la discussion précédente, il résulte que :

@ Si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

alors $\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} > 0$,

Le module de z' est $|z'| = \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}$

B

L'argument de z' est $\arg z' \equiv \frac{\theta}{2}$ [2π]

⑥ Si $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$

alors $\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} < 0$

$$z' = \underbrace{-\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)}_{>0}\left(\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

car $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$

et :

$$|z'| = \sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\arg z' \equiv \pi + \frac{\theta}{2} \quad [2\pi]$$

TB

3/

$F : P \longrightarrow P$

$M \longmapsto M' = F(M)$ / $\begin{cases} M' \text{ a pour affixe } z' = f(z) \\ M \text{ a pour affixe } z = \cos\theta + i\sin\theta \end{cases}$

Coordonnées de M' en fonction de $\theta \in [0, 2\pi[$

* Soient $M'(x', y')$.

$$z' = x' + y'i = \left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{2\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

d'où :

$$\begin{cases} x' = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \\ y' = \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\begin{cases} x' = \frac{1+\cos\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta \\ y' = \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1-\cos\theta}{2} \end{cases}$$

$$(I) \quad \begin{cases} 2x' = 1 + \cos\theta - \sin\theta \\ 2y' = -1 + \cos\theta + \sin\theta \end{cases}$$

d'où les formules demandées :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(1 + \cos\theta - \sin\theta) \\ y' &= \frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta - 1) \end{aligned}}$$

b) Ensemble $\mathcal{C}$?

Le système (I) peut s'écrire :

$$\begin{cases} 2x' - 1 = \cos\theta - \sin\theta \\ 2y' + 1 = \cos\theta + \sin\theta \end{cases}$$

en élevant au carré :

$$\begin{cases} (2x'-1)^2 = (\cos\theta - \sin\theta)^2 \\ (2y'+1)^2 = (\cos\theta + \sin\theta)^2 \end{cases}$$

comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\begin{cases} (2x'-1)^2 = 1 - 2\sin\theta\cdot\cos\theta \\ (2y'+1)^2 = 1 + 2\sin\theta\cdot\cos\theta \end{cases}$$

on soustrait : $4x'^2 + 1 - 4x' + 4y'^2 + 1 + 4y' = 2 + 0$

d'où $x'^2 + y'^2 - x' + y' = 0$: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

TB (C'est l'équation d'un cercle $(\mathcal{C})$.
Nous avons démontré que $\forall M'$, $M' \in (\mathcal{C})$.
$(\mathcal{C})$ = cercle de centre $\omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon ~~$\frac{1}{2} = R$~~.

Si vous aviez fait la transformation ci-dessus que conseille votre professeur, vous auriez vu R^2.

Vu

Si nous désignons par (E) l'ensemble des points M', nous avons donc démontré que $(E) \subset (\mathcal{C})$.

c) Ensemble (E) ?

Inversement, est-ce que $(\mathcal{C}) \subset (E)$?

$\forall M' \in (\mathcal{C})$, si $M(x,y)$

$$x^2 + y^2 - x + y = 0$$

bien posé

Peut-on alors trouver $z = \cos\theta + i \sin\theta$ tel que m d'affixe z ait pour image $M(x,y) \in (\mathcal{C})$?

Si oui, $\exists\, \theta \in [0, 2\pi[$

$$\begin{cases} 2x - 1 = \cos\theta - \sin\theta \\ 2y + 1 = \cos\theta + \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2\cos\theta \\ 2y - 2x + 2 = 2\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \cos\theta \\ -x + y + 1 = \sin\theta \end{cases}$$

TB

A-t-on $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$? si oui

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y$$

$$= 2(\underbrace{x^2 + y^2 - x + y}_{=0 \text{ car } M \in (\mathcal{C})}) + 1 -$$

$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \vdash |\alpha| \leq 1$ et $|\beta| \leq$

$-1 \leq \alpha \leq 1 \quad -1 \leq$

$\exists\, \theta /$ cos θ

alors

$\beta^2 = 1 - \alpha^2$

$\beta^2 = 1 - \cos^2\theta$

$\beta^2 = \sin^2\theta \vdash$

oui bien

Cela n'est pas suffisant pour que (?) il existe unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = x + y \\ \sin\theta = -x + y + 1 \end{cases}$$

il faudrait, de plus, que

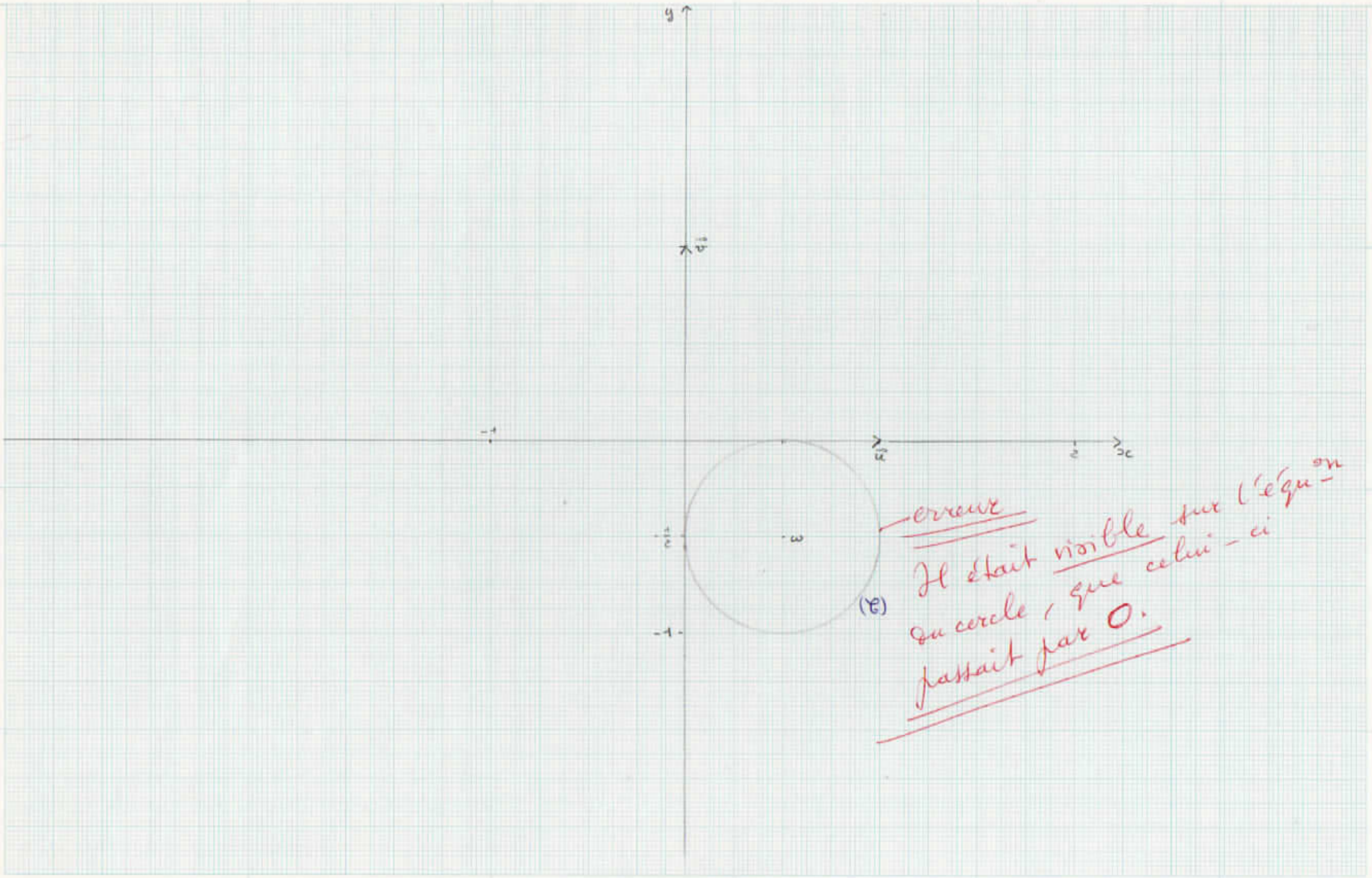
$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

Donc $(\mathcal{C}) \subset (E)$

En conclusion, $(E) = (\mathcal{C})$.

Lorsque $a^2 + b^2 = 1$, que pensez-vous de $|a|$? de $|b|$?

Mercier TC2



Erreur

Il était visible sur l'équation du cercle, que celui-ci passait par O.

LEB PAPIERS CANSON - FRANCE

M

Mercier Dany-Jack

Jeudi 13 février 1975

TC2

Terminale C - Devoir pour le jeudi 13 février 75 -

(I) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, résoudre l'équation : $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$, où $\bar{z}$ désigne le complexe conjugué de z.

(II) Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les nombres complexes $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ d'images respectives m et M. On suppose que : $Z = \frac{1+i}{z-1+i}$. Trouver l'ensemble des positions de M sachant que l'ensemble des positions de m est la droite D d'équation $x = 1$.

(III) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 ; $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée et f l'application de E dans E qui, à un vecteur $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ fait correspondre le vecteur $f(\vec{V}) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ avec : $X = \frac{1}{9}(-8x + 4y + z)$, $Y = \frac{1}{9}(4x + 7y + 4z)$, $Z = \frac{1}{9}(x + 4y - 8z)$.

1°) Montrer que f est une transformation orthogonale (ou encore une isométrie vectorielle) de E.

2°) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ telle que : $f(\vec{I}) = \vec{I}$; $f(\vec{J}) = -\vec{J}$; $f(\vec{K}) = -\vec{K}$. En déduire la nature de f.

(IV) Soit $(E, *)$ un groupe commutatif ; e l'élément neutre, a^{-1} le sym. d'un élément a. On pose $a^0 = e$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = a * a * \ldots * a$ (n facteurs), $a^{-n} = a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}$.

- Montrer que $A = \{x, x = a^p, p \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(E, *)$. On dira que A est le sous-groupe engendré par a.

- On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$ (n étant le plus petit entier vérifiant cette égalité. Montrer que :

$$A = \{a, a^2, \ldots, a^n\}.$$

- Montrer que dans le groupe multiplicatif des complexes non nuls $(\mathbb{C}^*, \times)$, le sous-groupe engendré par $a = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, vérifie les conditions précédentes.

(V) On dira qu'une fonction numérique f, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe sur I si : $\forall x \in I$, $\forall y \in I$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

a) Montrer que $f_1 : x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) h, définie sur $[0, \pi]$ par : $h(x) = -\sin x$; montrer qu'elle est convexe sur $[0, \pi]$; puis que si $x \neq y$, $h\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{h(x)+h(y)}{2}$.

c) On considère la fonction φ définie sur $[0, 2\pi]$ par : $\varphi(x) = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}$. Etudier les variations de φ sur $[0, 2\pi]$. En déduire l'inégalité : $\forall x \in [0, 2\pi]$; $\varphi(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

d) Dans un plan affine euclidien, on considère un cercle (Γ) de centre O, rayon R. Soient A un pt fixe de Γ et α, β, γ, 3 réels positifs vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. On désigne par B et C les pts de Γ tels que α, β, γ soient des mesures respectives des angles $(\vec{OA}, \vec{OB})$; $(\vec{OB}, \vec{OC})$; $(\vec{OC}, \vec{OA})$. 1°) Calculer en fonction de R, α et β, le périmètre $P = \|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\| + \|\vec{CA}\|$ du triangle ABC.

2°) Montrer que : $P \leq 2R.\varphi(\alpha+\beta) \leq 3R\sqrt{3}$, et que, si $\alpha \neq \beta$, alors $P < 3R\sqrt{3}$.

3°) Pour quelles positions des points B et C le triangle ABC a-t-il un périmètre maximal ?

(I)

$z \in \mathbb{C}$, $z = x + yi$ $\quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$

$x^2 + y^2 + 2xyi - 2(x - yi) + 1 = 0$

$x^2 - y^2 - 2x + 1 + 2y(x+1)i = 0 \quad \longmapsto \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 & (1) \\ 2y(x+1) = 0 & (2) \end{cases}$

Distingons deux cas :

1° $y = 0$

(1) : $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = 1$

$z_1 = 1$ est solution.

2° $x = -1$

(1) : $1 - y^2 + 2 + 1 = 0$

$y^2 = 4$

$y = \pm 2$

$z_2 = -1 + 2i$

$z_3 = -1 - 2i$ sont solution

En conclusion, l'ensemble S des solutions est $S = \{1 ; -1+2i ; -1-2i\}$.

(II)

Soit $\mathcal{L}$ l'application $\mathcal{g}$ et $\mathcal{L}$ soit $\mathcal{L}$ l'application F :

$$\mathcal{g} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto Z = \frac{1+i}{z-1+i} \qquad \text{avec } z \neq 1-i$$

$$F : P \longrightarrow P$$

$$m(z) \longmapsto M(Z)$$

Quel est l'ensemble (E) des points images M quand m décrit la droite d'équation cartésienne : $x = 1$?

* $\forall m \in (D)$, m a pour affixe $z = 1 + \lambda i$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$z = \frac{1+i}{1+\lambda i - 1 + i} = \frac{1+i}{(1+\lambda)i} = \frac{1-i}{1+\lambda}$$

Z n'aura de sens que si $\lambda \neq -1$.

Alors $M(x', y')$ / $\begin{cases} x' = \frac{1}{1+\lambda} \\ y' = -\frac{1}{1+\lambda} \end{cases}$ $\vdash$ $y' = -x'$

(D') : $x + y = 0$

Nous avons démontré que $\forall m \in (D)$, alors $M \in (D')$, donc $(E) \subset (D')$

* Inversement , $\forall M(x', y') \in (D)$, est-ce-que il existe $m(1, y) \in (D)$ tel que $F(m) = M$?

Tout revient à se demander s'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que le système

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{1+y} \\ -x' = -\frac{1}{1+y} \end{cases}$$ soit vérifié .

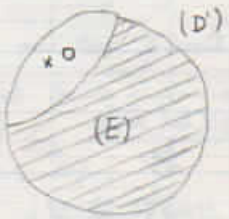
$$\begin{cases} y + 1 = \frac{1}{x'} \\ y + 1 = \frac{1}{x'} \end{cases} \vdash \quad y = \frac{1 - x'}{x'}$$

Il faut donc que $x' \neq 0$ pour qu'il existe y. Donc que $x' = y' = 0$.

Donc $(D') \not\subset (E)$ mais $(D') - \{0\} \subset (E)$

On a vu que $(E) \subset (D')$.

Donc $(E) = (D') - \{0\}$



(III)

Préliminaire

Les formules définissant f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{9}(-8x + 4y + z) \\ Y = \frac{1}{9}(4x + 7y + 4z) \\ Z = \frac{1}{9}(x + 4y - 8z) \end{cases}$$

Nous en déduisons la matrice de f dans $\mathcal{B}$:

$$M_{f(\mathcal{B})} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \end{bmatrix}$$

f ayant une matrice, f est nécessairement une application linéaire de E.

1°/ f est une transformation orthogonale si et seulement si elle est linéaire et elle conserve la norme.

* f est linéaire (voir préliminaire).

* f conserve-t-elle la norme ?

$\forall \vec{V} \in E, \quad \|\vec{V}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Alors :

$$\|f(\vec{V})\|^2 = \frac{1}{81}\left[(-8x+4y+z)^2 + (4x+7y+4z)^2 + (x+4y-8z)^2\right]$$

$$= \frac{1}{81}\left[64x^2 + 16y^2 + z^2 - 64xy - 16xz + 8yz + 16x^2 + 49y^2 + 16z^2 + \ldots\right.$$

$$\ldots + 56xy + 32xz + 56yz + x^2 + 16y^2 + 64z^2 + 8xy - 16xz \left. - 64yz\right]$$

$$= \frac{1}{81}\left[81x^2 + 81y^2 + 81z^2\right]$$

$\|f(\vec{V})\|^2 = \|\vec{V}\|^2 \quad \mapsto \quad \|f(\vec{V})\| = \|\vec{V}\|$ oui.

Donc f est un endomorphisme orthogonal de E.

2°/

$(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ telle que $f(\vec{I}) = \vec{I}$ et $f(\vec{J}) = -\vec{J}$, $f(\vec{K}) = -\vec{K}$

* Recherche de l'ensemble $(\text{inv } f)$ des vecteurs invariants par f.

$\forall \vec{v}(x,y,z) \in (\text{inv } f)$,

$$\left.\begin{cases} 9x = -8x + 4y + z \\ 9y = 4x + 7y + 4z \\ 9z = x + 4y - 8z \end{cases}\right\} \mapsto \begin{cases} -17x + 4y + z = 0 & (1) \\ 4x - 2y + 4z = 0 & (2) \\ x + 4y - 17z = 0 & (3) \end{cases} \qquad (I)$$

$$(I) \mapsto (II) \begin{cases} (1)+(3) : & -16x + 8y - 16z = 0 \\ (2) : & 2x - y + 2z = 0 \\ (3) : & x + 4y - 17z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{D} : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + 4y - 17z = 0 \end{cases}$$

Donc $(\text{inv } s) \subset$ droite vectorielle $\vec{D}$

Inversement, est-ce que tout vecteur de $\vec{D}$ est invariant par s ?

$\forall \vec{v}(x, y, z) \in \vec{D}$:

$$\begin{cases} z = \lambda \\ 2x - y = -2\lambda \\ x + 4y = 17\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -2\lambda \\ -2x - 8y = -34\lambda \end{cases}$$

$$-9y = -36\lambda$$

$$y = 4\lambda$$

$$x = 17\lambda - 16\lambda = \lambda$$

$$\vec{v} \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Alors $s(\vec{v})$ a pour coordonnées (x', y', z') telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(-8\lambda + 16\lambda + \lambda) = \lambda = x \\ y' = \frac{1}{9}(4\lambda + 28\lambda + 4\lambda) = 4\lambda = y \\ z' = \frac{1}{9}(\lambda + 16\lambda - 8\lambda) = \lambda = z \end{cases}$$

Donc $\vec{D} = (\text{inv } s)$

$\vec{I}_1(1, 4, 1)$ est un vecteur directeur de $\vec{D}$.

Recherche de l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé.

$\vec{u}(x, y, z)$, $s(\vec{u})(-x, -y, -z)$:

$$\left.\begin{cases} -9x = -8x + 4y + 8z \\ -9y = 4x + 7y + 4z \\ -9z = x + 4y - 8z \end{cases}\right\} \mapsto \begin{cases} x + 4y + 8z = 0 \\ 4x + 16y + 4z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

$$\mapsto \left.\begin{cases} x + 4y + 8z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}\right\} \mapsto x + 4y + z = 0$$

(nous avons procédé par équivalences)

L'ensemble cherché est donc le plan vectoriel $\vec{P}$: $x + 4y + z = 0$

de base $(\vec{I}_1, \vec{K}_1)$ / $\vec{I}_1(0, -1, 4)$

Recherche de $\mathcal{B}'(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ orthonormée

$\vec{I}_2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{8\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \in \vec{D}$ et $\|\vec{I}_2\| = \sqrt{\frac{8}{9} + \frac{128}{9} + \frac{8}{9}} = 4$

$\vec{J}_2\left(0, \frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{8}{\sqrt{17}}\right) \in \vec{P}$ et $\|\vec{J}_2\| = \sqrt{\frac{4}{17} + \frac{64}{17}} = 2$

$\vec{I} = \frac{\vec{I}_2}{\|\vec{I}_2\|} \in \vec{D}$ et $\|\vec{I}\| = 1$

$\vec{J} = \frac{\vec{J}_2}{\|\vec{J}_2\|} \in \vec{P}$ et $\|\vec{J}_2\| = 1$

Donc $\vec{I}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

$\vec{J}\left(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ (On a bien $\vec{I}.\vec{J} = 0$)

Cherchons $\vec{K}(x, y, z)$ / $\begin{cases} \vec{K} \in \vec{P} & (1) \\ \|\vec{K}\|^2 = 1 & (2) \\ \vec{I}.\vec{K} = 0 & (3) \\ \vec{J}.\vec{K} = 0 & (4) \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} (2)\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (3)\ \frac{\sqrt{2}}{6}x + \frac{2\sqrt{2}}{3}y + \frac{\sqrt{2}}{6}y = 0 \\ (4)\ \frac{y}{\sqrt{17}} - \frac{4z}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ y = 4z \end{cases}$

$\begin{cases} 289\lambda^2 + 16\lambda^2 + \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{306} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{3\sqrt{34}} \\ x = -17\lambda \\ y = 4\lambda \end{cases}$ si $z = \lambda$

D'où $\begin{cases} x = -\frac{17}{3\sqrt{34}} \\ y = \frac{4}{3\sqrt{34}} \\ z = \frac{1}{3\sqrt{34}} \end{cases}$

Est-ce que, alors, (1) est compatible ?

$\vec{I}.\vec{K} = \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} = 0$

$\vec{J}.\vec{K} = 0$,

$x + 4y + z = 0$

$-\frac{17}{3\sqrt{34}} + \frac{16}{3\sqrt{34}} + \frac{1}{3\sqrt{34}} = 0$ oui.

Conclusion :

$$\begin{cases} \vec{I}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \\ \vec{J}\left(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \\ \vec{K}\left(-\frac{17}{3\sqrt{34}}, \frac{4}{3\sqrt{34}}, \frac{1}{3\sqrt{34}}\right) \end{cases}$$

avec $f(\vec{I}) = \vec{I}$
$f(\vec{J}) = -\vec{J}$
$f(\vec{K}) = -\vec{K}$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$M_{f(\mathcal{B}')} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On reconnait la matrice d'une symétrie vectorielle de base $\vec{D}$ et de direction $\vec{P}$.

(IV) $(E, *)$ = groupe commutatif.

1°/

$A = \{x, x = a^p, p \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$

$(A, *)$ = sous-groupe de $(E, *)$?

Il suffit de s'assurer que A est stable pour $*$ et que le symétrique d'un élément quelconque de A appartient à A.

* Stabilité.

$\forall (x, y) \in A^2$, $x * y \in A$?

$x \in A \vdash x = a^p$, $p \in \mathbb{Z}$

$y \in A \vdash y = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$

Donc $x * y = a^p * a^n$

$= \underbrace{a * a * \dots * a}_{p \text{ facteurs}} \underbrace{* a * \dots * a}_{n \text{ facteurs}}$

$x * y = a^{p+n} \in A$

* $\forall x \in A$, $x^{-1} \in A$?

$x \in A \vdash x = a^p$

On remarque que $a^{-p} * a^p = a^p * a^{-p} = a^{p-p} = a^0 = e$

Donc $x^{-1} = a^{-p} \in A$.

$(A, *)$ = sous groupe commutatif de E.

2° $\exists n \in \mathbb{N}^* / \ a^n = e$

$A = \{a, a^2, \dots, a^n\}$?

En effet, $\forall q \in \mathbb{Z}$, $a^{n+q} = a^{n+\ell n+k}$

avec $q = \ell n + k$, $0 \leq k < n$.

$a^{n+q} = a^{n(1+\ell)} * a^k$

$= a^k * (a^n)^{1+\ell}$

$= a^k * e^{1+\ell}$

$= a^k * e$

$a^{n+q} = a^k \in \{a, a^2, \dots, a^n\}$

Signalez la commutativité

Vu

Donc $A = \{a, a^2, \dots, a^n\}$

3° $(\mathbb{C}^*, \times)$ = groupe commutatif.

A engendré par $a = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$ est tel que $(A, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ (même démonstration que dans le cas général).

De plus $a^n = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}\right)^n$

$= \cos 2\pi + i \sin 2\pi$ (formule de Moivre

$a^n = 1$ (élément neutre de $(\mathbb{C}^*, \times)$)

Ⓥ

a)

$f_1(x) = x^2$ est-elle convexe ?

Nous avons :

$(x-y)^2 \geqslant 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}$

$x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0$

$x^2 + y^2 \leqslant 2x^2 + 2y^2 - 2xy$

$x^2 + y^2 + 2xy \leqslant 2x^2 + 2y^2$

$\frac{x^2+y^2}{4} + \frac{1}{2}xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$

$\frac{(x+y)^2}{4} \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$

Comme $f_1\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{(x+y)^2}{4}$ et $f_1(x) = x^2$, $f_1(y) = y^2$,

Alors,

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}$, $\quad f_1\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f_1(x) + f_1(y)}{2}$

ce qui signifie que f_1 est convexe sur $\mathbb{R}$.

b)

h définie sur $[0,\pi]$: $h(x) = -\sin x$

Est-elle convexe sur $\mathcal{D}_{ef} h = [0,\pi]$?

Elle le sera si, et seulement si, $\forall (x,y) \in [0,\pi]$,

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{h(x)+h(y)}{2}$$

$$-\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant -\frac{1}{2}\left[\sin x + \sin y\right]$$

$$\frac{1}{2}(\sin x + \sin y) \leqslant \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$2 \times \frac{1}{2} \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} \leqslant \sin\frac{x+y}{2}$ (1)

erreur

* Si $\sin\frac{x+y}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \{ x \neq -y \text{ et } x+y \neq 2\pi \}$ $0 < x+y \leqslant 2\pi$ $0 \leq \frac{x+y}{2} \leqslant \pi$ $\sin\frac{x+y}{2} \geqslant 0$

Signe ?

Alors (1) devient :

~~$\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \cos\frac{x-y}{2} \leqslant 2$~~

On sait que $\cos\frac{x-y}{2} \leqslant 1$.

Donc $\cos\frac{x-y}{2} \neq 2$, et $\cos\frac{x-y}{2} < 2$ est vrai.

L'inégalité au sens strict est réalisée.

et mal raisonné

* Si $\sin\frac{x+y}{2} = 0 \Leftrightarrow \{ x = -y \text{ ou } x + y = 2\pi \}$

α) $x = -y$.

N'oublions pas que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

$x = -y$ si et seulement si $x = y = 0$.

Alors $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin(x) + \sin(y)}{2}$

β) $x + y = 2\pi$

et $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$

$x + y = 2\pi$ si et seulement si $x = y = \pi$

Alors $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin(x) + \sin(y)}{2}$

Revenons au cas où $\sin\frac{x+y}{2} \neq 0$.

Nous avons vu que $\cos\frac{x-y}{2} < 2$

Remontons les calculs : $\frac{1}{2}\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} < \sin\frac{x-y}{2}$

car $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$0 \leqslant y \leqslant \pi$ donc $0 \leqslant x + y \leqslant \pi$

$0 \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant \pi$ donc $\sin\frac{x-y}{2} > 0$

On trouve alors :

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\sin(x) + \sin(y)}{2}$$

Résumons nous :

$\forall (x, y) \in [0, 2\pi]^2$

$x = y = 0$ ou $x = y = \pi$	$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin(x) + \sin(y)}{2}$
$x \neq 0$ et/ou $y \neq 0$ $x \neq \pi$ et/ou $y \neq \pi$	$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\sin(x) + \sin(y)}{2}$

Une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour que $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\sin(x)+\sin(y)}{2}$ est que $x \neq y$.

(On peut trouver $x = y$ et $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\sin(x)+\sin(y)}{2}$, il suffirait en effet de prendre $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ et $x \neq \pi$ ou $y \neq \pi$)

c)

$\varphi(x) = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{4}$ définie sur $[0, 2\pi]$

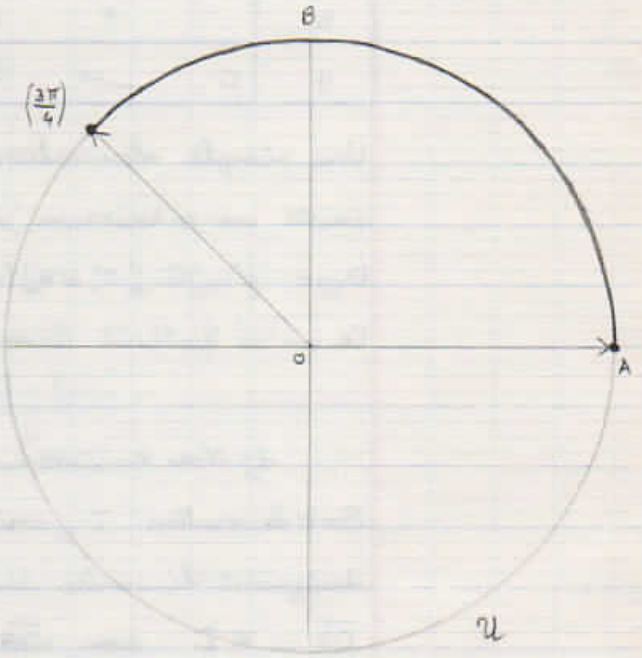
Variations de φ sur $[0, 2\pi]$

$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{4}\right]$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos\frac{3x}{8} \cdot \cos\frac{x}{8}$

$\varphi'(x) = \underbrace{\cos\frac{3x}{8}}_{A} \cdot \underbrace{\cos\frac{x}{8}}_{B}$



* Sgn $\cos\frac{3x}{8}$?

Posons $X = \frac{3x}{8}$

Quelle est la restriction à faire sur X ?

$0 \leq x \leq 2\pi$

$0 \leq X \leq \frac{3\pi}{4}$

Si $0 \leq \frac{3x}{8} < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\frac{3x}{8} > 0$

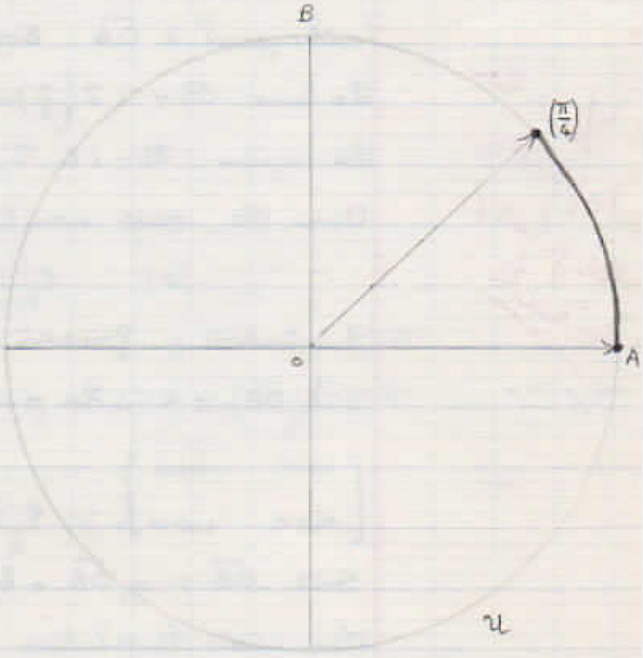
Si $\frac{3x}{8} = \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\frac{3x}{8} = 0$

Si $\frac{\pi}{2} < \frac{3x}{8} \leq \frac{3\pi}{4}$ alors $\cos\frac{3x}{8} < 0$

Donc $0 \leq x < \frac{4\pi}{3} \vdash A > 0$

$x = \frac{4\pi}{3} \vdash A = 0$

$\frac{4\pi}{3} < x \leq 2\pi \vdash A < 0$



* Sgn $\cos\frac{x}{8}$?

Posons $Y = \cos\frac{x}{8}$

$0 \leq x \leq 2\pi$

$0 \leq \frac{x}{8} \leq \frac{\pi}{4}$

Donc

$\forall x \in [0, 2\pi]$, $\cos\frac{x}{8} = B > 0$

En conclusion, $\operatorname{Sgn} \varphi'(x) = \operatorname{Sgn} A$

Rappel : $0 \leq x < \frac{4\pi}{3} \vdash \varphi(x) > 0$

$x = \frac{4\pi}{3} \vdash \varphi'(x) = 0$

$\frac{4\pi}{3} < x \leq 2\pi \vdash \varphi'(x) < 0$

x	0		$\frac{4\pi}{3}$		2π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

avec $y = \varphi(x)$

Une simple observation du tableau de variation nous montre que en $x = \frac{4\pi}{3}$ existe un maximum m de la fonction définie sur $[0, 2\pi]$.

Donc $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\varphi(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Ce qu'il fallait démontrer.

d) Nous traiterons cette question analytiquement.

Soit le vecteur $\vec{i}$, unitaire, colinéaire et de même sens que $\vec{OA}$, O désignant le centre du cercle (Γ).

$\vec{OA} = R\vec{i}$ donc $\vec{OA} \perp \Gamma$

$\|\vec{OA}\| = R$

De même $\|\vec{OB}\| = \|\vec{OC}\| = R$.

Il est possible de trouver un vecteur $\vec{OK}$, de même norme que $\vec{OA}$ et de orthogonal à $\vec{OA}$. Soit $\vec{j}$, unitaire, colinéaire et de même sens que $\vec{OK}$.

La base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de $\vec{E}_2$.

Le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

Dans $\mathcal{B}$, nous avons $\vec{OA}\ (R, 0)$

Vous la supposez, de plus, directe.

$\exists$ rotation ρ faisant passer de $\vec{OA}$ à $\vec{OB}$. Cette rotation a pour angle $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \alpha$. La matrice de ρ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{OA}, \vec{OK})$ est

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Soit $\vec{OB} = a_1 \vec{OA} + b_1 \vec{OK}$.

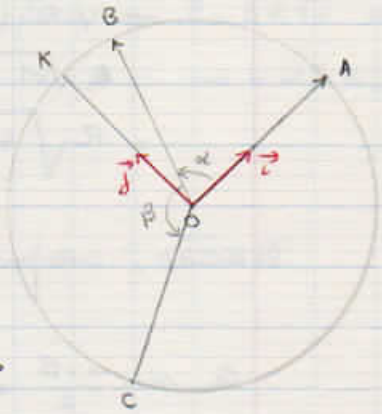
Nous avons la relation matricielle $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{OA}}$ dans $\mathcal{B}'$

Donc $\overrightarrow{OB} = \cos\alpha\ \overrightarrow{OA} + \sin\alpha\ \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OB} = (\cos\alpha)\, R\,\vec{i} + (\sin\alpha)\, R\,\vec{j}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ dans la base orthonormée (directe) $(\vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{B}$ sont $\overrightarrow{OB}\begin{bmatrix} R\cos\alpha \\ R\sin\alpha \end{bmatrix}$

De même, $\exists$ ε' rotation faisant passer de $\overrightarrow{OA}$ à $\overrightarrow{OC}$. Cette rotation a pour angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \alpha+\beta$. La matrice de ε' dans la base $\mathcal{B}'$ est donc $\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = M_{\varepsilon'}$



Soit $\overrightarrow{OC} = c_1\overrightarrow{OA} + d_1\overrightarrow{OK}$

nous avons $\begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = M_{\varepsilon'}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{OA}}$

Donc $\overrightarrow{OC} = R\cos(\alpha+\beta)\,\vec{i} + R\sin(\alpha+\beta)\,\vec{j}$

Donc, en posant $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$,

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a-R \\ b \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} c-a \\ d-b \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} R-c \\ -d \end{pmatrix}$

avec $\begin{cases} a = R\cos\alpha \\ b = R\sin\alpha \\ c = R\cos(\alpha+\beta) \\ d = R\sin(\alpha+\beta) \end{cases}$

On peut calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ et $\|\overrightarrow{CA}\|$:

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(a-R)^2+b^2} = \sqrt{R^2\cos^2\alpha + R^2 - 2R^2\cos\alpha + R^2\sin^2\alpha}$

$= \sqrt{2R^2(1-\cos\alpha)}$

$= \sqrt{4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$= 2R\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$

$\|\overrightarrow{AB}\| = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$ car $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi \vdash \alpha \leq 2\pi$ et $\beta \leq 2\pi$ et $\gamma \leq 2\pi$

$0 \leq \alpha \leq 2\pi$

$0 \leq \frac{\alpha}{2} \leq \pi \vdash \sin\frac{\alpha}{2} \geq 0$

$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

$$= R\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha + \sin^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}$$

$$= R\sqrt{2 - 2\cos(\alpha+\beta-\alpha)}$$

$$= R\sqrt{2 \cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

$$\|\vec{BC}\| = 2R\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\|\vec{CA}\| = \sqrt{(R-c)^2 + d^2}$$

$$= \sqrt{R^2(1-\cos(\alpha+\beta))^2 + R^2\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$= R\sqrt{1+1-2\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= R\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\|\vec{CA}\| = 2R\left|\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right|$$

Or $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{2\pi-\gamma}{2} = \sin\left(\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\frac{\gamma}{2} \geqslant 0$

Donc :

$$\|\vec{CA}\| = 2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Donc

$$\boxed{P = 2R\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$2R\varphi(\alpha+\beta)$

$2R\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geqslant P$

$\sin\frac{\alpha+\beta}{4} \leqslant \frac{1}{2}\left[-\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right]$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{4} \geqslant (\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2})$

2°/

* $P \leqslant 2R\varphi(\alpha+\beta)$?

$P \leqslant 2R\varphi(\alpha+\beta) \iff \frac{P}{2R} \leqslant \varphi(\alpha+\beta)$

En utilisant la convexité de h, vous arriveriez directement au résultat.

$$\iff \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \sin\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}$$

$$\iff 2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{4} \leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}$$

$$\iff \cos\frac{\alpha+\beta}{4} \leqslant 1 \quad \text{oui.} \qquad 0 < \alpha+\beta \leqslant 2\pi$$

$0 < \frac{\alpha+\beta}{4} \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha+\beta}{4} > 0$

Comment tenez-vous compte du signe de $\sin\frac{\alpha+\beta}{4}$?

* $2R\varphi(\alpha+\beta) \leqslant 3R\sqrt{3} \iff \varphi(\alpha+\beta) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Ceci résulte directement du fait que, $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\varphi(x) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$

~~Il faut vérifier que $\alpha+\beta \in [0, 2\pi]$~~

Vu

En conclusion, $P \leq 2R\varphi(\alpha+\beta) \leq 3R\sqrt{3}$

~~Nous avons vu plus haut (cf~~

Quand $P = 3R\sqrt{3}$?

$$P = 3R\sqrt{3} \mapsto \begin{cases} P = 2R\varphi(\alpha+\beta) \\ \text{et} \\ 2R\varphi(\alpha+\beta) = 3R\sqrt{3} \end{cases}$$

Une condition nécessaire, mais pas suffisante, pour que $P = 3R\sqrt{3}$ est que $P = 2R\varphi(\alpha+\beta) \mapsto \cos\frac{\alpha-\beta}{4} = 1 \mapsto \alpha = \beta$ car α et $\beta \in [0, 2\pi]$

$P = 3R\sqrt{3} \vdash \alpha = \beta$

D'où la contraposée : $\alpha \neq \beta \vdash P \neq 3R\sqrt{3}$ donc $P < 3R\sqrt{3}$.

CQFD

3°/

P maximal sous quelles conditions ?

P maximal $\mapsto$ $P = 3R\sqrt{3}$

Alors $P = 2R\varphi(\alpha+\beta) = 3R\sqrt{3}$

Il est nécessaire que $\alpha = \beta$ pour que $P = 2R\varphi(\alpha+\beta)$ soit réalisée.

Alors ~~$P = 3R\sqrt{3}$ devient~~

~~$2R\left(2\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\right) = 3R\sqrt{3}$~~

~~$2\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}$~~

Vu

il faut aussi que :

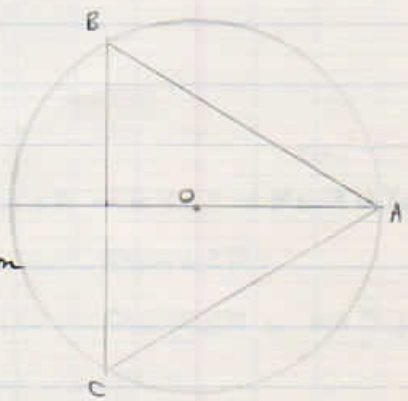
$$2R\varphi(\alpha+\beta) = 3R\sqrt{3}$$

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \mapsto \alpha+\beta = \frac{4\pi}{3} \quad \text{(voir tableau de variations)}$$

Comme $\alpha = \beta$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

Or $\gamma = 2\pi - \alpha - \beta = \frac{2\pi}{3}$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3}$



"Le triangle dont le périmètre est maximal est un ~~trino~~ triangle équilatéral".

MATHEMATIQUES . Classe de neige . Terminale C2 . (n°1)

Apprendre . en géométrie : Angles ; produit vectoriel, de la page 212 à la page 223. Exercices d'application : n°s 1 ; 3 ; 4, p 235 ; puis n° 11, p 236.
Lire p 223 et 224 : angles de couples de droites vectorielles ; puis exercices d'application n°s 9, 10, p 236.
. en analyse (et étude des nombres) : suites ; suites arithmétiques ; suites géométriques. Sur le Tome I (nombres) : de la page 149 à la page 159 (le 3.18. a. compris) ; puis p 167 (le paragraphe d en entier). Remarques : connaître les formules encadrées du 3-16 ; le 3-17-d est très important.

Exercices sur les suites :

(1) Sachant que la somme des n premiers nombres entiers naturels consécutifs est égale à 276, calculer n.

(2) Déterminer 7 termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 77 et la somme de leurs carrés 959 ; on désignera par a le 4e terme, et par r la raison de la suite.

(3) Déterminer 4 termes consécutifs d'une suite arithmétique dont la raison est 4 et le produit des termes est 585.

(4) Trouver 3 nombres réels, consécutifs, dans une suite géométrique, connaissant leur somme 65 et leur produit 3375

(5) Trouver 4 entiers relatifs consécutifs connaissant leur produit 1680.

Problèmes : (I) Le plan affine euclidien est rapporté à un rep. orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un point M se déplace dans ce plan. A la date $t = 0$, où commence le mouvement, le pt M est en O et son vecteur vitesse est nul. A toute date t positive, le vecteur accélération du pt M a pour coordonnées $(6t, 2)$. Donner, en fonction de t, les expressions des coordonnées de M à la date t. Tracer la trajectoire de M et discuter l'existence d'une tangente à cette trajectoire ayant une direction donnée.

(II) on définit une application P de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :
$P : (z_1, z_2) \longmapsto P(z_1, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$, lorsqu'on a posé $z_1 = x_1 + i y_1$ et $z_2 = x_2 + i y_2$; $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour tout couple (z_1, z_2) de nombres compl. on a : $P(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$

. Montrer que P est un produit scalaire. Quelle interprétation peut-on donner de la norme associée à ce produit scalaire ? Montrer que $\mathbb{C}$ muni de ce produit scalaire est un plan vectoriel euclidien dont 1 et i forment une base orthonormée.

. α et β désignant 2 nombres complexes donnés, l'application $f_{\alpha,\beta}$ est ainsi définie, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \longmapsto f_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$. Elle est linéaire (le vérifier). On désigne par m et n les images respectives de 1 et i par l'appl° $f_{\alpha,\beta}$. Montrer que m et n sont orthogonaux si et seulement si : $\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 0$. Montrer que m et n sont tous les deux unitaires si et seulement si : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0$. En déduire que $f_{\alpha,\beta}$ est une transf. orthogonale ssi : $(|\alpha| = 1$ et $\beta = 0)$ ou $(\alpha = 0$ et $|\beta| = 1)$.

(Suite autre feuille)

Classe de neige - Terminale C_2 (feuille n° 2) MATH

Ecrire dans chacun de ces cas les matrices associées à f dans la base $(1, i)$; (un nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$; s'en souvenir). Définir géométriquement les endomorphismes orthogonaux obtenus en précisant leurs éléments. Etudier en particulier $f_{i,0}$ et $f_{0,-1}$.

(III) On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et M désigne une matrice du type $M = aA + bB$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On considère l'endomorphisme $f_{a,b}$ d'un plan vectoriel E ayant M pour matrice par rapport à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de E euclidien.

• On considère les vecteurs $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

Déterminer les matrices des applications $f_{0,b}$ et $f_{a,0}$ par rapport à la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$.

Montrer que chacune de ces applications est, lorsque a et b ne sont pas nuls, la composée d'une projection et d'une homothétie qu'on précisera.

• Déterminer la matrice de $f_{a,b}$ par rapport à la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Dans quels cas $f_{a,b}$ est-elle une rotation, une symétrie, une homothétie ? Donner avec précision les éléments définissant ces applications.

Mercier Dany-Jack

TC2

6 mars.

Très bon travail

Mathématique

(I) Soit $\vec{\gamma}$ le vecteur accélération du point M à la date t :

$$\vec{\gamma}\begin{cases} x'' = 6t \\ y'' = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \int 6t\,dt = 3t^2 + Cte' \\ y' = \int 2\,dt = 2t + Cte \end{cases}$$

Le vecteur vitesse a donc pour coordonnées

Pour $t=0$, $\vec{v} = \vec{0}$ donc $Cte = Cte' = 0$.

$$\vec{v}\begin{cases} x' = 3t^2 \\ y' = 2t \end{cases}$$

$\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = \int 3t^2 dt = t^3 + A' \\ y = \int 2t\,dt = t^2 + A \end{cases}$$

Pour $t=0$, $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ donc $A' = A = 0$

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad (I)$$

Trajectoire du mobile

De plus, nous avons $t \geqslant 0 \mapsto x \geqslant 0$.

$$\text{Si } (I)\ \left\{\begin{array}{l} x = t^3 \text{ et } t \geqslant 0 \\ y = t^2 \end{array}\right\} \vdash \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{y^3} \\ t = \sqrt{y} \end{array}\right\} \vdash \left[x^2 = y^3 \text{ et } x \geqslant 0\right] (II)$$

Inversement, est-ce que (II) $\vdash$ (I) ?

$\forall M(x,y)$ vérifiant (II), existe-t-il $t \in \mathbb{R}_+$ tel que (I) soit vrai ?

B

Posons $t^2 = y$, ce qui se peut eu égard à $y^3 = x^2 \vdash y^3 \geqslant 0 \vdash y \geqslant 0$.

Prenons ce t positif.

Alors : $x^2 = (t^2)^3 \vdash x = t^3$ puisque $x \geqslant 0$.

La réciproque a abouti.

La trajectoire du mobile a pour équation cartésienne $\boxed{x^2 = y^3 \text{ et } x \geqslant 0}$

* fonction $y^3 = x^2$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Le domaine des valeurs de cette fonction est $\mathcal{V} = \mathbb{R}_+$.

Calcul de la dérivée de y par rapport à x, soit $\frac{dy}{dx}$.

Nous avons vu que $\begin{cases} x' = 3t^2 \\ y' = 2t \end{cases}$

donc $\frac{dy}{dt} = 2t$ (1) et $\frac{dx}{dt} = 3t^2$ (2)

Si $t \neq 0$, divisons (1) par (2) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3t} \quad \text{avec} \quad x = t^3 \vdash t = \sqrt[3]{x} \quad (t > 0)$$

donc $y'_x = \frac{2t}{3\sqrt[3]{x}} > 0$

La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

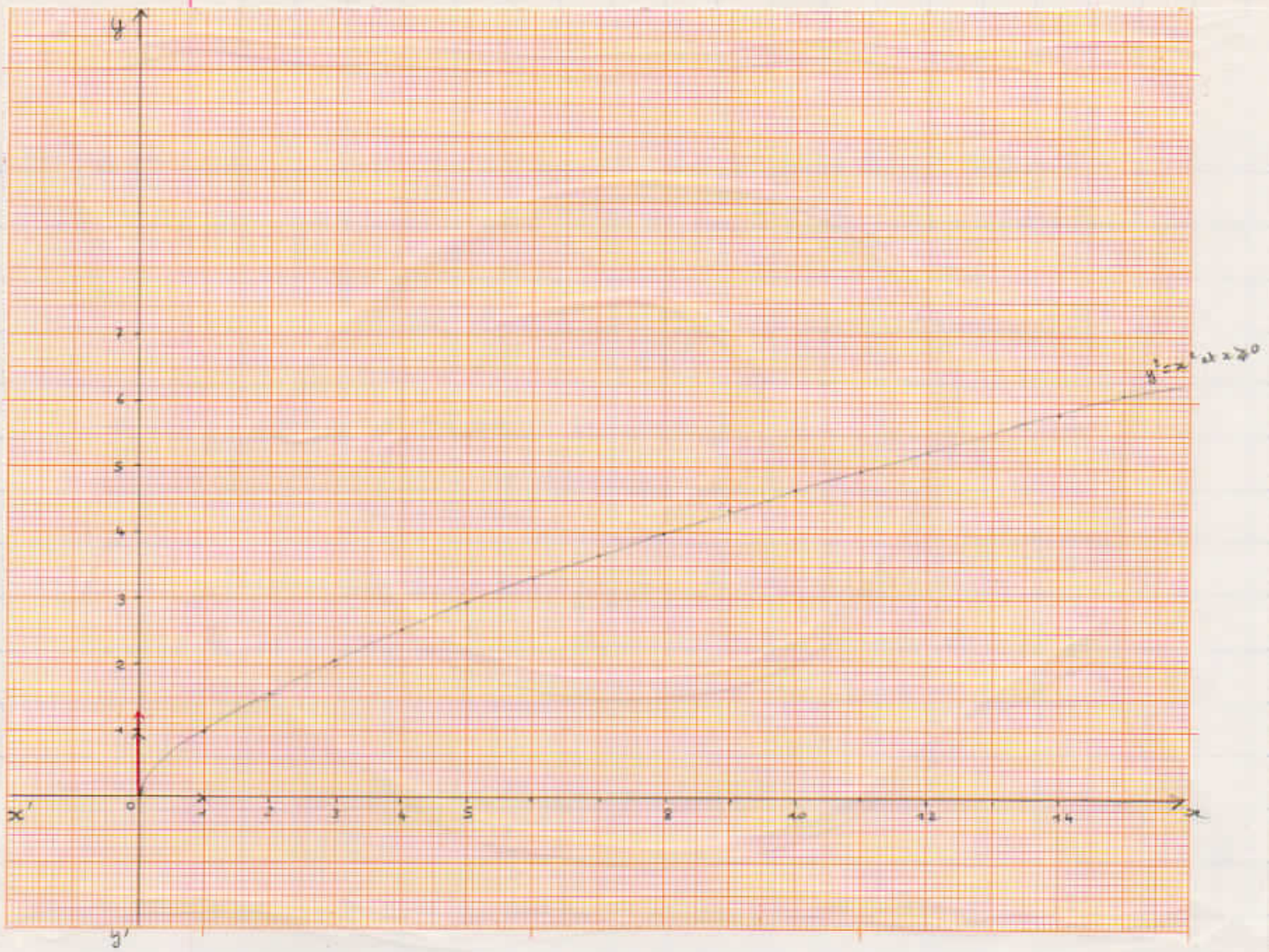
* Recherche d'une asymptote.

Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$. Il peut donc exister une asymptote à la courbe représentative de cette fonction.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{-\frac{1}{3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$ Conclure ici

et $y - 0x = y$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [y - 0x] = +\infty$.

La courbe représentative de la fonction $y^3 = x^2$ avec $x \geqslant 0$ admet une "direction asymptotique" qui est celle de la droite (Δ) d'équation $y = 0$ (axe $x'x$). La courbe admettra une "branche parabolique".



Discussion de l'existence d'une tangente à cette trajectoire ayant une direction donnée.

On sait que $\vec{v} \begin{cases} x' = 3t^2 \\ y' = 2t \end{cases}$. Supposons $t \neq 0$ pour que $\vec{v} \neq \vec{0}$

Le vecteur $\vec{e} = \vec{v} = 3t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}$ est le vecteur directeur de la tangente à la trajectoire (Γ) au point M où se trouve le mobile M à la date $t \neq 0$.

Cherchons l'équation cartésienne de cette tangente :

$\vec{e}\begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ $\quad M\begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$

$$\frac{x - t^3}{3t^2} = \frac{y - t^2}{2t}$$ puisque $t \neq 0$

$(T_{t\neq 0})$: $\quad 2x - 2t^3 = 3ty - 3t^3$

$$2x - 3ty + t^3 = 0 \quad \text{ou encore :} \quad y = \frac{2}{3t}x + \frac{t^2}{3}$$

On donne une pente m.

Pour qu'il soit possible de trouver une tangente à (Γ) de pente m, il faut et

Il suffit qu'il existe $t > 0$ tel que $\frac{2}{3t} = m \mapsto m \neq 0$ et $t = \frac{2}{3m}$

On doit avoir $\frac{2}{3m} > 0 \mapsto m > 0$.

B Si $t = 0$, alors $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ n'existe pas.

mais $\lim_{x \to 0_+} y' = +\infty$. La tangente est donc la droite $y'y$.

* Conclusion.

a) la direction donnée est celle de $y'y$: il existe une seule tangente : $y'y$.

B b) la pente donnée est $m > 0$: alors $\exists ! (T_t)$: $y = mx$ et $t = \frac{2}{3m}$

c) La pente donnée est $m \leq 0$: $\nexists (T_t)$. pas tout à fait

II *

$P(z_1, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ avec $z_1 = x_1 + i y_1$ et $z_2 = x_2 + i y_2$.

$(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$

A-t-on $P(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$? l'appeler Q :

$Q = \frac{1}{2}\left[(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) + (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i)\right]$

pas encore. $= \frac{1}{2}\left[x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i + x_1 x_2 + y_1 y_2 - (x_2 y_1 - x_1 y_2) i\right]$

$Q = P(z_1, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ donc $Q = P(z_1, z_2)$.

oui.

* P est un produit scalaire

a) C'est une forme sesquilinéaire symétrique

En effet, $P(z_1, z_2) \in \mathbb{R}$, et : $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

X $P(\lambda u, v) = \frac{1}{2}(\lambda \bar{u} v + \lambda u \bar{v}) = \lambda P(u, v)$ puisque $\overline{\lambda u} = \bar{u}$!

$P(u_1 + u_2, v) = \frac{1}{2}\left[(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) v + (u_1 + u_2) \bar{v}\right]$

$= \frac{1}{2}(\bar{u}_1 v + u_1 \bar{v}) + \frac{1}{2}(\bar{u}_2 v + u_2 \bar{v})$

$= P(u_1, v) + P(u_2, v)$ puisque $\overline{u_1 + u_2} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$

On démontrerait, de la même façon, que :

$P(u, \lambda v) = \lambda P(u, v)$ et $P(u, v_1 + v_2) = P(u, v_1) + P(u, v_2)$

Mais il suffit de démontrer que P est symétrique :

B

$$P(u,v) = \frac{1}{2}(\bar{u}v + u\bar{v}) = \frac{1}{2}(\bar{v}u + v\bar{u}) = P(v,u).$$

b) Cette forme est définie positive. Cela forme une expression

~~* positive~~ : $\forall u \in \mathbb{C}, \quad P(u,u) = \frac{1}{2}(\bar{u}u + u\bar{u}) = u\bar{u} = |u|^2 \geq 0$

~~* définie~~ : $P(u,u) = 0 \Leftrightarrow |u|^2 = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

P est bien un produit scalaire de $\mathbb{C}$.

Interprétation de ce produit scalaire.

Soit, dans le plan d'Argand-Cauchy, les vecteurs :

$\vec{u}$ d'affixe $z_1 = x_1 + y_1 i$

et $\vec{v}$ d'affixe $z_2 = x_2 + y_2 i$

On a : $\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$ (le plan étant euclidien)

et nous avons vu que $P(z_1, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2$.

Donc $P(z_1, z_2) = \vec{u}.\vec{v}$

Énonçons donc cette propriété :

" Le produit scalaire P qui au couple $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ fait correspondre le réel $P(z_1, z_2)$ est égal au produit scalaire euclidien $\vec{u}.\vec{v}$ des images, dans le plan complexe, des nombres z_1 et z_2."

$\mathbb{C}$ = plan vectoriel euclidien

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un espace vectoriel de dimension 2. sur $\mathbb{R}$

De plus, il est muni du produit scalaire P, donc d'une norme. C'est donc un plan vectoriel euclidien normé.

La norme d'un complexe est définie comme il suit :

$$z \longmapsto \text{norme}(z) = \sqrt{P(z,z)} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|$$

$(1, i)$ = système générateur de $\mathbb{C}$ et système libre $(\alpha 1 + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0)$

De plus, $|1| = |i| = 1$

et $P(1, i) = \frac{1}{2}(1(-i) + 1i) = 0$

$(1, i)$ = base orthonormée de $\mathbb{C}$.

• $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto f_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z + \beta \bar{z} \qquad (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$

$f_{\alpha,\beta}$ linéaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_{\alpha,\beta}(\lambda z) = \alpha \lambda z + \beta \lambda \bar{z} = \lambda(\alpha z + \beta \bar{z}) = \lambda f_{\alpha,\beta}(z)$

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$: $f_{\alpha,\beta}(z_1 + z_2) = \alpha(z_1+z_2) + \beta(\bar{z_1} + \bar{z_2})$

$= (\alpha z_1 + \beta \bar{z_1}) + (\alpha z_2 + \beta \bar{z_2})$

$= f_{\alpha,\beta}(z_1) + f_{\alpha,\beta}(z_2)$

vérifiez les 2 points

$m = f_{\alpha,\beta}(1) = \alpha + \beta$

$n = f_{\alpha,\beta}(i) = \alpha i - \beta i$

m et n orthogonaux $\mapsto P(m,n) = 0$

$\mapsto \frac{1}{2}(m\bar{n} + \bar{m}n) = 0$

$\mapsto (\alpha+\beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(-i) + (\bar{\alpha}+\bar{\beta})(\alpha-\beta)i = 0$

$\mapsto i\left[-\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta - \beta\bar{\beta}\right] = 0$

$\mapsto 2\alpha\bar{\beta} - 2\bar{\alpha}\beta = 0$

$\mapsto \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 0$

CQFD

m et n unitaires si et seulement si $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0$

f m unitaire $\mapsto$ norme$(m) = 1 \mapsto |m| = 1 \mapsto m\bar{m} = 1 \mapsto (\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) = 1$

De même, n unitaire $\mapsto n\bar{n} = 1 \mapsto (\alpha-\beta)i(\bar{\alpha}-\bar{\beta})(-i) = 1$

$\mapsto (\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta}) = 1$

Tout revient à démontrer que

$$(I)\ \left\{\begin{array}{l}(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) = 1\\ (\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta}) = 1\end{array}\right\} \mapsto \left\{\begin{array}{l}|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\\ \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0\end{array}\right.$$

$$\mapsto \left\{\begin{array}{l}\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1\\ \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0\end{array}\right. \quad (II)$$

* (I) $\mapsto$ (II).

En effet

$$(I)\ \left\{\begin{array}{l}\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 1 \qquad (1)\\ \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 1\end{array}\right.$$

$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$ alors (1) : $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0$.

* inversement, (II) ⊢ (I)

La démonstration est immédiate :

$$(II)\begin{cases} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \\ \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0 \end{cases} \vdash \begin{cases} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \overbrace{(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)}^{0} = 1 \\ \underbrace{\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}}_{1} + \underbrace{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}_{0} = 1 \end{cases} (I)$$

Donc (I) ⊣ (II)

CQFD

$f_{\alpha,\beta}$ transf. orthogonale ssi ($|\alpha| = 1$ et $\beta = 0$) ou ($\alpha = 0$ et $|\beta| = 1$)

$f_{\alpha,\beta}$, linéaire, ne sera une transformation orthogonale que si, une base orthonormée de $\mathbb{C}$ est transformée en une base orthonormée de $\mathbb{C}$.

Il faut et il suffit donc que $(\underbrace{f_{\alpha,\beta}(1)}_{m}, \underbrace{f_{\alpha,\beta}(i)}_{n})$ = base orthonormée de $\mathbb{C}$.

Donc que

a) m et n orthogonaux ⊢ $\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 0$ (2)

et b) norme(m) = norme(n) = 1 ⊢ $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0$ (3)

(2) et (3) : $\begin{cases} \alpha\bar{\beta} = 0 \\ \text{et} \\ \bar{\alpha}\beta = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta = 0 \vdash \alpha\beta = 0 \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{cases}$

Il faut donc que l'on ait simultanément

donc $\begin{cases} \alpha = 0 \\ |\beta|^2 = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \beta = 0 \\ |\alpha|^2 = 1 \end{cases}$

Donc [$|\alpha| = 1$ et $\beta = 0$] ou [$\alpha = 0$ et $|\beta| = 1$]

CQFD

Matrices de ces transformations

* Cas où $|\alpha| = 1$ et $\beta = 0$. α a pour module 1.

$f_{\alpha,0}(1) = \alpha = \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$f_{\alpha,0}(i) = \alpha i = (\cos\theta + i\sin\theta)\, i = -\sin\theta + i\cos\theta$

D'où la matrice

$$M_I = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ dans la base $(1, i)$

$$M_I = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

La base $(1, i)$ est orthonormée directe (posons là telle). La matrice M_I est la matrice de la rotation de $\mathbb{C}$ d'angle θ.

impropre

* Cas où $\alpha = 0$ et $|\beta| = 1$. $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ / $\beta = \cos\alpha + i \sin\alpha$

$s_{0,\beta}(1) = \beta = \cos\alpha + i \sin\alpha$

$s_{0,\beta}(i) = -\beta i = (-\cos\alpha - i \sin\alpha) i = \sin\alpha - i \cos\alpha$

La matrice de $s_{0,\beta}$ dans la base orthonormée $(1, i)$ est :

$$M_{II} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

C'est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à un axe.
Cet axe est l'ensemble des complexes invariants par $s_{0,\beta}$.
Soit $z = x + yi$ appartenant à cet axe :

$$\begin{cases} x = x\cos\alpha + y \sin\alpha \\ y = x \sin\alpha - y \cos\alpha \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x(\cos\alpha - 1) + y \sin\alpha = 0 \\ x \sin\alpha - y(\cos\alpha + 1) = 0 \end{cases}$$

$D = (1 - \cos\alpha)(\cos\alpha + 1) - \sin^2\alpha$

$= \cos\alpha + 1 - \cos^2\alpha - \cos\alpha - \sin^2\alpha$

$D = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Le système (4) est donc équivalent à l'équation par exemple $x(\cos\alpha - 1) + y \sin\alpha = 0$.
qui est toujours l'équation d'une "droite" si, toutefois, $\cos\alpha - 1$ et $\sin\alpha$ ne sont pas nuls en même temps.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = 1 \\ \sin\alpha = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha \equiv 0 \ [2\pi]$$

Si $\alpha \not\equiv 0 \mod(2\pi)$, l'axe des invariants est la "droite" d'équation cartésienne $(\cos\alpha - 1)x + y \sin\alpha = 0$.

Si $\alpha \equiv 0 \ [2\pi]$, $\cos\alpha = 1$ et $\sin\alpha = 0$.

$$M_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

et l'ensemble des complexes invariants est défini par $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = -y \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = 0$

Voir d'ailleurs la 2e équation du système (4)

L'axe cherché est donc la "droite" d'équation $y = 0$.

Etude de $f_{i,0}$

Nous avons : $\begin{cases} |i| = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$f_{i,0}$ = endomorphisme orthogonal.

Ici, $\alpha = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$

$\theta \neq 0$.

La matrice M_I^* est $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$f_{i,0}$ est donc l'identité de $\mathbb{C}$. En effet $f_{i,0}(z) = iz$

La matrice M_I^* est $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$f_{i,0}$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Etude de $f_{0,-1}$

Nous avons $\begin{cases} 0 = 0 \\ |-1| = 1 \end{cases}$

$f_{0,-1}$ = endomorphisme orthogonal.

Ici $\beta = -1 = \cos\pi + i \sin\pi$

La matrice de $f_{0,-1}$ est donc $M_{II}^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$f_{0,-1}$ est donc la symétrie vectorielle orthogonale de base la droite engendrée par le complexe i.

(III)

Notations

$M_{a,b}$ désignera la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée.

$M'_{a,b}$ désignera la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ " .

Matrice de changement de base.

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

On vérifie aisément que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

$(\vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{B}'$ = base orthonormée.

Soit $\vec{s}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{B}$

(X, Y) dans $\mathcal{B}'$.

$$\vec{s} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \left(X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)\vec{j}$$

Donc (I) $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$

La matrice P de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Sous forme matricielle (I) devient :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

P inversible en égard au fait que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base.

$\exists\ P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

et

$$\boxed{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} \quad (II)$$

Matrices $M'_{0,b}$ et $M'_{a,0}$.

* Recherche de $M'_{0,b}$.

On a $M'_{0,b} = bB = \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}$ et $M_{a,0} = aA = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$

$$f_{0,b}(\vec{u}) : \begin{pmatrix} b\frac{\sqrt{2}}{2} + b\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -b\frac{\sqrt{2}}{2} - b\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathcal{B}$$

De même $f_{0,b}(\vec{v}) : \begin{pmatrix} b\frac{\sqrt{2}}{2} - b\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -b\frac{\sqrt{2}}{2} + b\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ (et dans $\mathcal{B}'$)

Alors :

$f_{0,b}(\vec{u}) : \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$. (voir P^{-1})

Donc

$$M'_{0,b} = \begin{bmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* Recherche de $M'_{a,0}$.

dans $\mathcal{B}$:

$f_{a,0}(\vec{u}) : \begin{pmatrix} a\frac{\sqrt{2}}{2} - a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} - a\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_{a,0}(\vec{v}) : \begin{pmatrix} a\frac{\sqrt{2}}{2} + a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} + a\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sqrt{2} \\ a\sqrt{2} \end{pmatrix}$

dans $\mathcal{B}'$:

$f_{a,0}(\vec{u}) : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_{a,0}(\vec{v}) : \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \end{pmatrix}$

Donc

$$M'_{a,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$$

Décomposition de $f_{0,b}$

Dans $\mathcal{B}'$:

$\forall \vec{\delta}(x,y)$ dans $\mathcal{B}'$: $\vec{\delta}(x,y) \xrightarrow{p} \vec{\delta}_1(0,y) \xrightarrow{h_{2a}} \vec{\delta}'(0,2ay)$

p = projection sur la droite vectorielle $\mathcal{D}_{\vec{v}}$ parallèlement à $\mathcal{D}_{\vec{u}}$.

h_{2a} = homothétie vectorielle de rapport $2a \neq 0$.

p a pour matrice dans $\mathcal{B}'$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

h_{2a} " " : $\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$

On vérifie que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} = M'_{0,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$

Décomposition de $f_{a,0}$

Dans $\mathcal{B}'$:

$$\vec{\delta}(x,y) \xrightarrow{q} \vec{\delta}_1(x,0) \xrightarrow{h_{2b}} \vec{\delta}'(2bx,0)$$

• q = projection sur la droite vect. $\vec{\mathcal{D}}_{\vec{u}}$ parallèlement à $\vec{\mathcal{D}}_{\vec{v}}$

h_{2b} = homothétie vect. de rapport $2b \neq 0$.

q a pour matrice dans $\mathcal{B}'$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

h_{2b} " " " : $\begin{bmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2b \end{bmatrix}$

On vérifie également que : $M'_{a,0} = \begin{bmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2b \end{bmatrix}$

Matrice $M'_{a,b}$

dans $\mathcal{B}$:

$$f_{a,b}(\vec{u}) : \begin{pmatrix} (a+b)\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) - \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$f_{a,b}(\vec{v}) : \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sqrt{2} \\ a\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{B}'$:

$$f_{a,b}(\vec{u}) : \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{2} - b\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{a,b}(\vec{v}) : \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{M'_{a,b} = \begin{bmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}}$

Remarque : On aurait pu écrire :

$M'_{a,b} = M'_{a,0} + M'_{0,b}$

* $f_{a,b}$ est une rotation ...

si et seulement si $\begin{bmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ est de la forme $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ avec $x^2+y^2=1$

(cf base $\mathcal{B}'$ orthonormée)

Donc $2b = 2a \iff a = b$

et $4 \times b^2 = 1 \iff b^2 = \frac{1}{4} \iff b = \pm \frac{1}{2}$

Alors

$$\begin{cases} M_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I & I = \text{matrice de l'identité } Id_{\vec{E}}. \\ \text{ou} \\ M_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I & \text{, alors } f_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = -Id_{\vec{E}} \end{cases}$$

B

* $f_{a,b}$ est une symétrie (orthogonale) ...

si et seulement si $\begin{bmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ est de la forme $\begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}$ avec $x^2+y^2=1$

Donc $b = -a$.

et $b^2 = \frac{1}{4} \iff b = \pm \frac{1}{2}$

Donc 2 possibilités :

$$\begin{cases} M_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } f_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \text{symétrie orth. par rapport à la droite } \vec{\mathcal{D}}_{\vec{v}} \\ \text{ou} \\ M_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } f_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \text{symétrie orth. par rapport à } \vec{\mathcal{D}}_{\vec{w}} \end{cases}$$

Schémas ?

* $f_{a,b}$ est une homothétie vectorielle ...

de rapport $\alpha = 2a = 2b$ si et seulement si $a = b \neq 0$

B

Alors $M_{a,a} = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$

$\forall \vec{\delta} \in \vec{E}$, $f_{a,a}(\vec{\delta}) = 2a\vec{\delta}$

B

M

Mercier Dany-Jack
TC2

Jeudi 12 mars 75

16/20

Revoir III

Mathématique

I Etude et graphique en rep. orth. de : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (f fonction)

$$x \longmapsto f(x) = y = \frac{\sqrt{5x+1}}{x}$$

Dans quels intervalles peut-on définir une appl. réciproque d'une restriction de f ? Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ lorsque cela est possible.

II Dans $\vec{E}_3$ euclidien orienté muni de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée directe, soit φ l'endomorphisme de E_3 dont la matrice dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Démontrer que φ est une rotation vectorielle et donner une mesure associée à φ.

III Etude de la suite (u_n) définie par la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{5u_n^2 + 4}{12}$$

On se bornera à une étude graphique : montrer qu'elle est convergente ou non suivant la valeur attribuée au premier terme u_1.

(I) $y = \dfrac{\sqrt{5x+1}}{x}$

* domaine de définition de f. On doit avoir $x \neq 0$ et

$5x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{5}$

$\mathcal{D}_f = \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right[- \{0\}$

* $f'(x) = y' = \dfrac{(\sqrt{5x+1})' x - \sqrt{5x+1} \times 1}{x^2}$

$(\sqrt{5x+1})' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}$

donc $y' = \dfrac{\frac{5x}{2\sqrt{5x+1}} - \sqrt{5x+1}}{x^2}$

$= \dfrac{5x - 2(5x+1)}{2x^2\sqrt{5x+1}}$

$y' = \dfrac{-5x-2}{2x^2\sqrt{5x+1}} \Big\} > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$

y' s'annule pour $x = -\frac{2}{5}$

Comme $-\frac{2}{5} < -\frac{1}{5}$, sur $\mathcal{D}_f$, y' est toujours ~~positive~~ négative.

D'où le tableau de variation :

x	$-\frac{1}{5}$	~~$-\frac{2}{5}$~~	0		$+\infty$
y'	‖	$+ \quad -$	‖	$+ \quad -$	
y	0	↗	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0_+

De plus

$f\left(-\frac{1}{5}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt{5x+1}}{x} = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{\dfrac{5x+1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{+\infty} \sqrt{\dfrac{5}{x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0_+$

et $\lim_{x \to 0} y = ?$

Deux cas sont à considérer :

* Si $x \to 0_-$, $\sqrt{5x+1} \longrightarrow 1$ et $\lim_{x \to 0_-} y = -\infty$

* Si $x \to 0_+$, $\lim_{x \to 0_+} y = +\infty$.

Graphique de f : voir le graphique

Continuité en $x = -\frac{1}{5}$

$\lim_{x \to -\frac{1}{5}+0} y = 0$. f est donc continue à droite en $x = -\frac{1}{5}$.

* Dérivabilité en $x = -\frac{1}{5}$

On a $\lim_{x \to -\frac{1}{5}+0} y' = \pm\infty$

La courbe admet donc une tangente parallèle à l'axe des y au point à droite d'abscisse $x = -\frac{1}{5}$.

Fcts réciproques

Observons le tableau de variation.

f est strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{5}, 0\right[$ et sur $\left]0, +\infty\right[$.

Comme de plus, f est continue sur ces intervalles, il résulte que les 2 restrictions suivantes de f sont bijectives :

$f_1 : \left[-\frac{1}{5}, 0\right[\longrightarrow \left[0, -\infty\right[$

$f_2 : \left]0, +\infty\right[\longrightarrow \left]0, +\infty\right[$

Recherche de f_{01}^{-1}

$y_1 = \dfrac{\sqrt{5x_1+1}}{x_1}$ et $x_1 < 0$ (voir tableau)

ce qui est équivalent à $y_1^2 = \dfrac{5x_1+1}{x_1^2}$ et $y_1 < 0$

$5x_1 + 1 = x_1^2 y_1^2$

$y_1^2 x_1^2 - 5x_1 - 1 = 0$

$\Delta = 25 + 4y_1^2 > 0$.

Comme $\dfrac{-1}{y_1^2} < 0$, les 2 racines $\frac{x}{y_1}$ et $\frac{x}{y_1}$ seront de signe opposé.

$\dfrac{5 \pm \sqrt{4y_1^2+25}}{2y_1^2}$

Ne conservons que la racine négative (~~positive~~ en égard à $x_1 < 0$)

$x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{4y_1^2+25}}{2y_1^2}$

Donc $f_1^{-1} : [0, -\infty[\longrightarrow [-\frac{1}{5}, 0[$

$y_1 \longmapsto x_1 = f_1^{-1}(y_1) = \dfrac{5 - \sqrt{4y_1^2+25}}{2y_1^2}$

$x \longmapsto y = \dfrac{5 - \sqrt{4x^2+25}}{2x^2}$

La courbe représentative de cette fonction se déduit de la courbe représentative de f_1 par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Il faut toutefois que $y_1 \neq 0$ pour que ce soit une équ. du 2e degré ! $y_1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$

Recherche de f_2^{-1}

$f_2 :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$

Donc $y_2 = \dfrac{\sqrt{5x_2+1}}{x_2}$ et $x_2 > 0$.

On refait un calcul en tout point analogue au précédent et l'on trouve deux racines distinctes à l'équation $y_2^2 x_2^2 - 5x_2 - 1 = 0$, à savoir $\dfrac{5 + \sqrt{4y_2^2+25}}{2y_2^2}$ ou $\dfrac{5 - \sqrt{4y_2^2+25}}{2y_2^2}$

On ne conserve que la racine positive (en égard à $x_2 > 0$) :

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{4y_2^2 + 25}}{2y_2^2}$$

Et :

$$f_2^{-1} :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$$

$$x \longmapsto y = \frac{5 + \sqrt{4x^2 + 25}}{2x^2}$$

Le graphique de f_2 admet pour asymptote verticale l'axe $y'y$.

II

$$A = \begin{matrix} \varphi(\vec{i}) & \varphi(\vec{j}) & \varphi(\vec{k}) \\ \sim & \sim & \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nature de φ.

* φ est linéaire et nous allons montrer qu'elle "conserve" une base orthonormée.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée transformée en $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k}))$

Ca, un simple examen de la matrice donne :

$\|\varphi(\vec{i})\| = \|\varphi(\vec{j})\| = \|\varphi(\vec{k})\| = 1$

et $\varphi(\vec{i}).\varphi(\vec{j}) = \varphi(\vec{i}).\varphi(\vec{k}) = \varphi(\vec{j}).\varphi(\vec{k}) = 0$

φ est donc un endomorphisme orthogonal de $\vec{E}_3$

*

* Recherche du sous-espace des vecteurs invariants.

$\forall \vec{u}(x, y, z)$ invariant,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -x \\ y = z \\ z = y \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right.$$

L'ensemble cherché est donc la droite vectorielle $\vec{\Delta}$ d'équations cartésiennes $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right.$

et de vecteur directeur $\vec{u}_1(0, 1, 1)$. $\quad \|\vec{u}_1\| = \sqrt{2}$

Orientation de $\vec{P} = \vec{\Delta}^{\perp}$

Orientons arbitrairement la droite $\vec{\Delta}$ par la donnée de l'un de ses vecteurs unitaires : soit $\vec{n}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Soit $\vec{e}_1 \in \vec{P}$, $\vec{e}_1$ unitaire (et, bien sûr, $\vec{e}_1 \perp \vec{n}$)

L'équation cartésienne du plan $\vec{P}$ est :

$$\vec{P} : \quad y + z = 0.$$

$\vec{u}_1$ ~~$\vec{e}_2$~~ ~~$\vec{e}_2$~~ (~~e~~, 1, 1, -1) $\in \vec{P}$

On vérifie que $\|\vec{e}_1 \vec{u}_1\| = \sqrt{3}$

Donc ~~$\vec{e}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right.$~~

$\vec{u}_1 \ (0, 1, -1) \in \vec{P}$ et $\| \vec{u}_1 \| = \sqrt{2}$

$\vec{e}_1 \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \in \vec{P}$ et $\| \vec{e}_1 \| = 1$

Cherchons, maintenant, le vecteur $\vec{e}_2 \in \vec{P}$ tel que la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ soit une base orthonormée directe

On aura $\vec{n} \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ (eu égard à $(\vec{n}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ directe)

$\vec{n}$	$\vec{e}_1$	
0	0	
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	
0	0	$q = 0$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$r = 0$

Donc $\vec{e}_2 \left(-1, 0, 0 \right)$

En conclusion :

$\vec{e}_1 \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$\vec{e}_2 \left(-1, 0, 0 \right)$

$\vec{n} \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{matrix} & \underbrace{\varphi(\vec{e}_1)} & \underbrace{\varphi(\vec{e}_2)} & \\ \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc

$\varphi(\vec{e}_1) = (\cos x)\, \vec{e}_1 + (\sin x)\, \vec{e}_2$ (1)

De (1), on déduit :

$$\begin{cases} \cos x = \vec{e}_1 \cdot \varphi(\vec{e}_1) \\ \sin x = \vec{e}_2 \cdot \varphi(\vec{e}_1) \end{cases}$$

Rappelons :

$\vec{e}_1 \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ dans $\mathcal{B}$.

$$\varphi(\vec{e}_1) \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donc $\cos x = 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

$\vec{e}_2 \left(-1, 0, 0 \right)$

$\sin x = 0$

Donc $\boxed{x \equiv \pi \ [2\pi]}$

φ est donc le retournement de $\vec{E}_3$ d'axe $\vec{\Delta}$.

Parlez de l'influence de l'orientation de $\vec{P}$ par $\vec{n}$ (ou $-\vec{n}$), sur la mesure trouvée

On vérifie que φ est involutive :

$$\varphi \begin{cases} x' = -x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

$$\varphi \circ \varphi \begin{cases} x'' = -x' = x \\ y'' = z' = y \\ z'' = y' = z \end{cases}$$

donc $\varphi \circ \varphi = Id_{\vec{E}_3}$.

III

$$u_{n+1} = \frac{5u_n^2 + 4}{12} \qquad (1)$$

Etude préliminaire.

Supposons que (u_n) admette une limite et que cette limite soit ℓ.

Alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

(1) : $12\ell = 5\ell^2 + 4$

$5\ell^2 - 12\ell + 4 = 0$

$\Delta' = 36 - 20 = 16 \qquad \sqrt{\Delta'} = 4$

$\frac{6 \pm 4}{5}$

La limite supposée ne peut être égale qu'à 2 ou à $\frac{2}{5}$.

Etude graphique

Considérons la fonction $y = \frac{5x^2 + 4}{12}$

(P) : $y = \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{3}$

C'est l'équation de la parabole dont le sommet S est au point d'abscisse $x = 0$. $S\left(0, \frac{1}{3}\right)$

Cette parabole tourne sa concavité vers les y positif (voir graphique)

Premier cas

plus petit que quel nombre ?

On prend $u_1 < 0$ et u_1 assez petit en valeur absolue : ~~prenons $u_1 < -2$~~.

La droite d'équation $x = u_1$ coupe la parabole (P) en un point dont l'ordonnée est égale à u_2. On reporte u_2 sur Ox et on obtient le point M ~~tel~~ sur Ox tel que $\overrightarrow{OM} = u_2$. (voir graphique)

On constate que $u_2 < |u_1|$ (voir graphique).

En refaisant la même opération, on obtient u_3 qui est plus proche de $\frac{2}{5}$. (voir étude préliminaire).

Il semble que ce soit ~~le~~ l'ordonnée (ou l'abscisse) du point A qui soit

revoir détail graphique

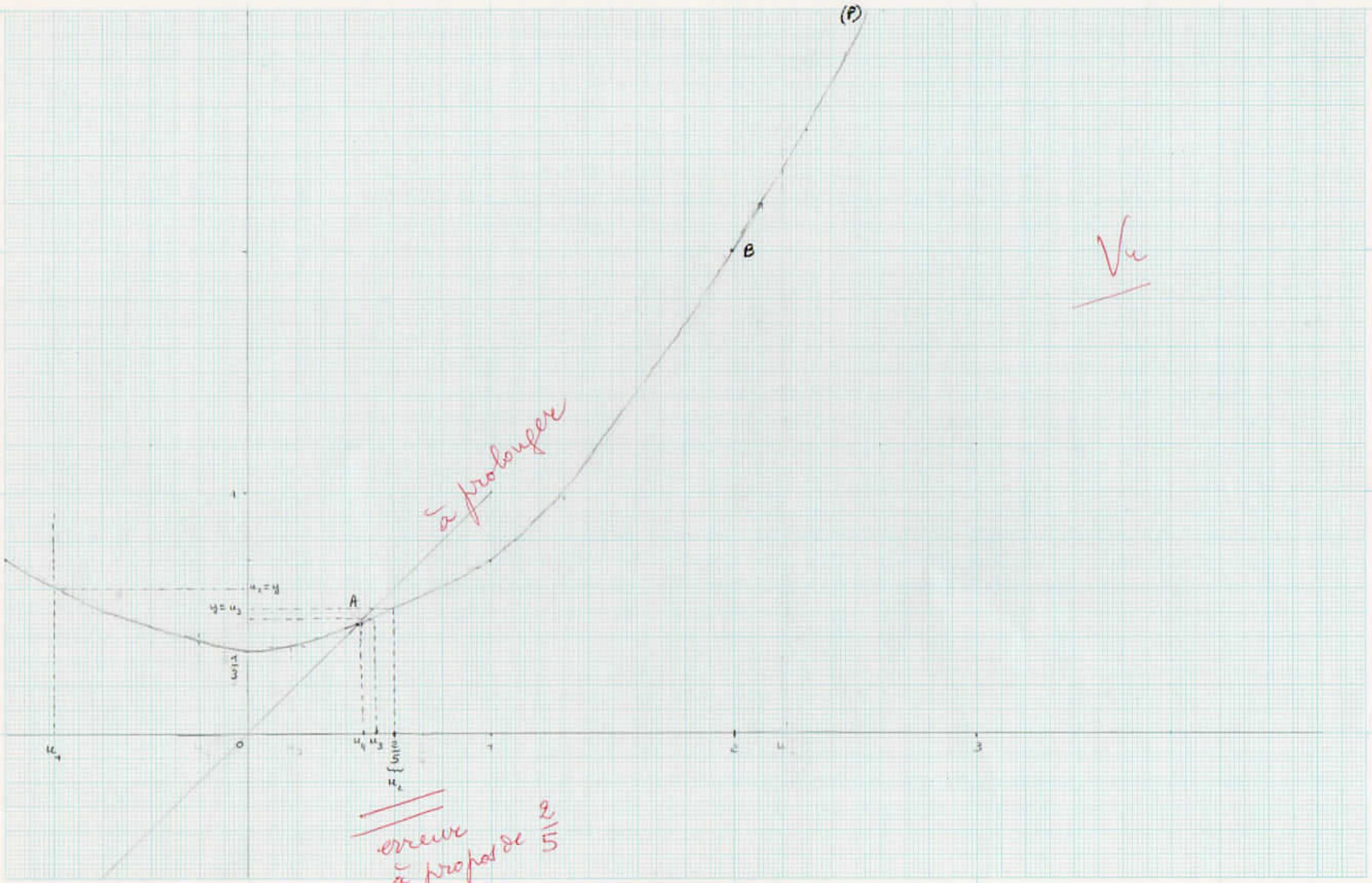
la limite cherchée

encore !

Deuxième cas : Si l'on prend $0 < u_1$ et $|u_1|$ petit, x étant l'abscisse du point B, on obtient le même résultat que tout à l'heure : la limite de la suite est alors le réel $\frac{2}{5}$ (cela provient de ce que l'ordonnée ~~de u_1 est~~ du point d'abscisse $x = u_1$ est alors inférieure à u_1, ce qui donnera une abscisse $u_2 < u_1$ et ainsi de suite).

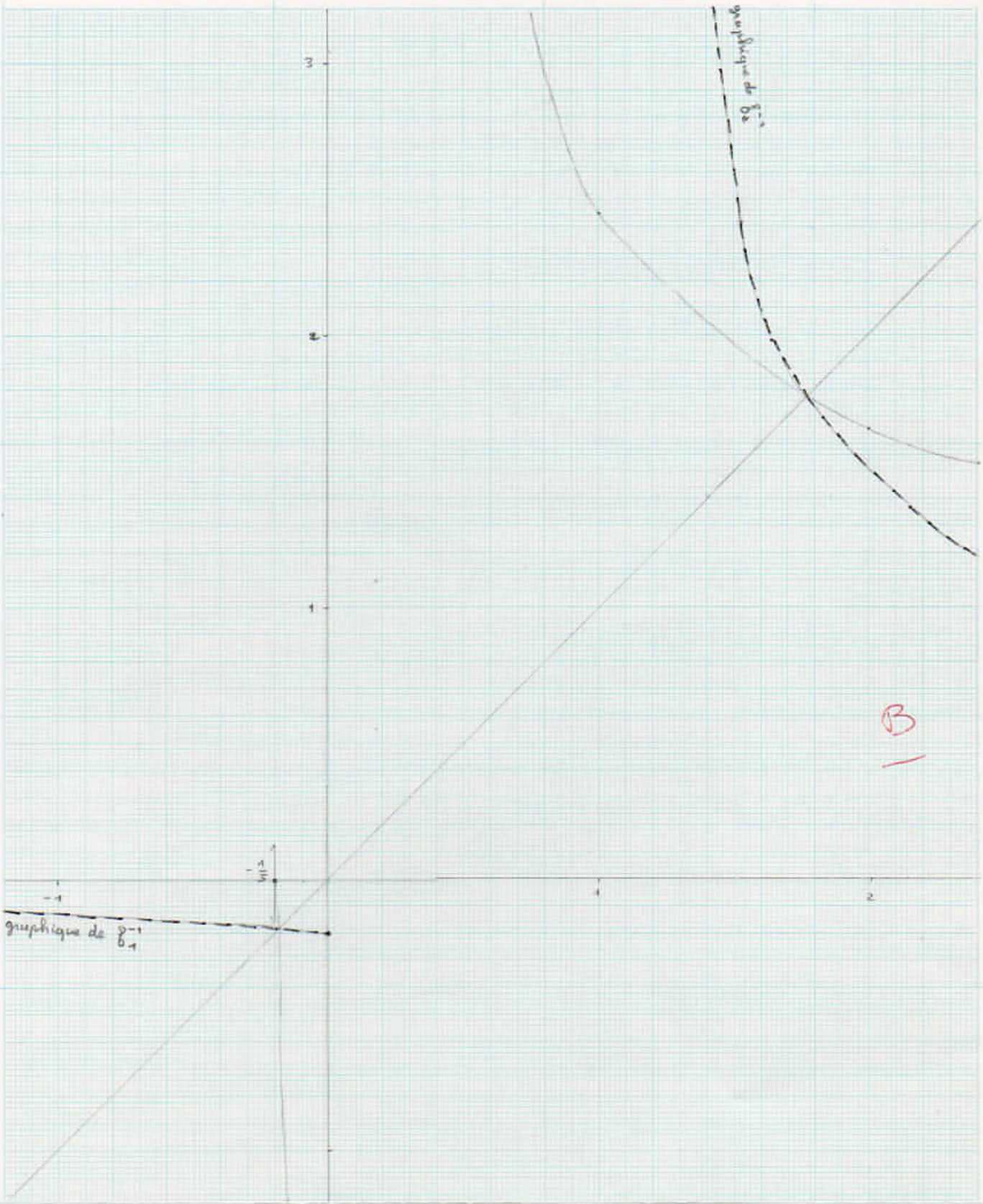
$u_1 < 0$ et $|u_1|$ très grand ou si $u_1 > 0$ et $|u_1|$ très grand
~~très petit ou si u_1~~

Troisième cas : Si $u_1 < -2$ ou si $u_1 > 2$, alors ~~l'abscisse~~ l'ordonnée du pt d'abscisse $x = u_1$ est supérieure à u_1, donc $u_2 > u_1$ et ainsi de suite. La limite de la suite est alors $+\infty$



Vu

LES PAPIERS CANSON – FRANCE



B

Terminale C_2 - Devoir en classe - 2 mai 1975 - 4 h

1er exercice : Cinq entiers naturels a, b, c, d, e sont 5 éléments consécutifs d'une suite géométrique dont la raison est un entier supérieur à 1 et premier avec a. Déterminer ces 5 nombres de façon que : $6a^2 = e - b$.

2e exercice : Soit φ une fonction numérique telle que $\varphi(t) \neq 0$

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \; ; \; t \longmapsto \varphi(t).$$

On considère la fonction vectorielle

$$F : t \longrightarrow \overrightarrow{F(t)} = \left[\varphi(t) + \frac{1}{\varphi(t)}\right]\vec{i} + \left[\varphi(t) - \frac{1}{\varphi(t)}\right]\vec{j} - 2\varphi(t).\vec{k},$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant une base orthonormée de $\vec{E}_3$.

1° on suppose que $\varphi'(t) = \lambda.\varphi(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. M désignant un mobile tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F(t)}$, $O \in E_3$, t désignant la date de sa position M, écrire en fonction de $\varphi(t)$ les coordonnées du vecteur vitesse, puis celles du vect-accélération de M, soit $\vec{V}_M$ et $\vec{\Gamma}_M$. Ecrire ensuite les coord. de $\vec{\Gamma}_M$ en fonction de celles de $\overrightarrow{F(t)}$. Conclure. En déduire le vecteur $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}_M$ (produit vectoriel).

2° Toujours avec l'hypothèse : $\varphi'(t) = \lambda\varphi(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, de quelles fonctions φ s'agit-il ?

3° on choisit $\varphi(t) = e^{it}$. Calculer le vecteur $\vec{W} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_M$ puis le vecteur dérivé $\vec{W}'(t)$; comparer ce dernier à : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}_M$.

Que peut-on conclure à propos du vecteur $\vec{W}$, puis à propos de la trajectoire de M dans E_3 ?

Problème : 1) Etudier les variations de $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto f_1(x) = y_1 = x.\text{Log}\,x$. Déterminer son graphique C_1 en rep. orthonormé ; points et tangentes remarquables ; branches infinies. On appellera A le point de C_1 d'ordonnée nulle.

2) Etudier les variations de $f_2 : x \longmapsto y_2 = f_2(x) = x^2\text{Log}\,x - \frac{x^2}{2}$. Graphique C_2 en utilisant le même repère que ci-dessus. Points d'inflexion. Tangentes aux points remarq. ; branches infinies.

3) Trouver l'aire S de la boucle déterminée par les courbes C_1 et C_3, graphiques respectifs de f_1 et f_3 avec :

$f_1 : x \longmapsto f_1(x) = x\text{Log}\,x$; $f_3 : x \longmapsto f_3(x) = \left|\frac{1}{2}x\text{Log}\,x\right|$.

4) on mène, par un point δ de l'axe $(O, \vec{i})$, une parallèle (Δ) à $(O, \vec{j})$. Déterminer l'abscisse de δ de manière que l'aire comprise entre A, l'axe $(O, \vec{i})$, (Δ) et (C_1) soit égale à $\frac{S}{2}$.

5) Soit $a(x)$ l'aire algébrique comprise entre l'axe $(O, \vec{i})$, la courbe C_1 et une parallèle à $(O, \vec{j})$, menée par un point d'abscisse x. Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $a(x) = k$, k désignant un réel donné.

Mercier Dany-Jack
TC2

Vendredi 2 mai 1975

18/20

Composition de Mathématique

Problème

1°) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_1(x) = y_1 = x \operatorname{Log} x$

* $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}_+^*$

* $y'_1 = \operatorname{Log} x + x \cdot \frac{1}{x}$

$y'_1 = \operatorname{Log} x + 1$

Cette dérivée s'annule pour $\operatorname{Log} x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Si $0 < x < \frac{1}{e}$, $y'_1 < 0$

Si $x > \frac{1}{e}$, $y'_1 > 0$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y'_1	‖	$-$	0	$+$	
y_1	‖ 0_-	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

$\frac{1}{e} \simeq 0{,}37$

* $\lim\limits_{x \to 0_+} f_1(x) = 0_-$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \operatorname{Log} x = +\infty$ car $x \to +\infty$ et $\operatorname{Log} x \to +\infty$

* Voir graphique.

* Tangente quand x tend vers 0 ?

$\lim\limits_{x \to 0_+} (\operatorname{Log} x + 1) = -\infty$. La courbe tend à admettre donc une tangente verticale

Le "prolongement" de f_1 à $\mathbb{R}^+$ a un graphique qui, en 0, admet une telle tangente

lorsque $x \to 0_+$.

Tangente pour $x = 1$: $y'_1 = 1$. Cette tangente est parallèle à la 1ère bissectrice.

* Existe-t-il une asymptote à la courbe quand $x \to +\infty$?

On a vu que $\lim\limits_{+\infty} f_1(x) = +\infty$.

$$\lim_{+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{+\infty} \operatorname{Log} x = +\infty$$

La courbe admet donc une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.

2°/

$$f_2 : x \longmapsto y_2 = f_2(x) = x^2 \operatorname{Log} x - \frac{x^2}{2}$$

* $\mathcal{D}ef f_2 = \mathbb{R}_+^*$
* Sur $\mathcal{D}ef f_2$,

$$y'_2 = 2x \operatorname{Log} x + x^2 \cdot \frac{1}{x} - x$$

$$y'_2 = x(2 \operatorname{Log} x) = 2x \operatorname{Log} x \quad \text{// remarque !}$$

y'_2 s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 1$. $x = 0$ à rejeter.

Cherchons la pente de la tangente à (C_2) au point où la courbe coupe l'axe Ox :

$x^2\left(\operatorname{Log} x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\operatorname{Log} x = \frac{1}{2}$

$x = e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,64$

Rem : $y'(e^{\frac{1}{2}}) = e^{\frac{1}{2}} 2 \frac{1}{e} = e^{\frac{1}{2}}$

x	0		1		$+\infty$
$\operatorname{Log} x$	‖	$-$	0	$+$	
y'_2	‖	$-$	0	$+$	
y_2	‖ 0_-	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

* $\lim\limits_{x \to 0_+} \left(x^2 \operatorname{Log} x - \frac{x^2}{2}\right) = \lim\limits_{0_+} \left(x(x \operatorname{Log} x) - \frac{x^2}{2}\right) = 0_-$

Car, quand $x \to 0_+$, $x \operatorname{Log} x \to 0_-$ et $-\frac{x^2}{2} \to 0_-$

$$\lim_{+\infty} f_2(x) = \lim_{+\infty} \left(x^2 \operatorname{Log} x - \frac{x^2}{2} \right) = ?$$

Levons l'indétermination.

$f_2(x)$ peut s'écrire $x^2 \left(\operatorname{Log} x - \frac{1}{2} \right)$

et $x^2 \to +\infty$ et $\operatorname{Log} x - \frac{1}{2} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Donc $\lim_{+\infty} f_2(x) = +\infty$

* tangente à la courbe quand $x \to 0_+$.

Le coefficient directeur de cette tangente a pour limite :

$$\lim_{x \to 0_+} y_2' = \lim_{0_+} 2x \operatorname{Log} x = 0$$

La tangente tend donc à être parallèle à l'axe des x.

ou alors celui d'une sécante OM: $\frac{f_2}{x}$

* recherche d'asymptote.

Cherchons $\lim_{+\infty} \frac{y_2}{x} = \lim_{+\infty} \left(x \operatorname{Log} x - \frac{x}{2} \right) = \lim_{+\infty} x \left(\operatorname{Log} x - \frac{1}{2} \right) = +\infty$

La courbe C_2 admet donc une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des x.

* Points d'inflexions :

On a vu (cf 1ère question) que $(x \operatorname{Log} x)' = \operatorname{Log} x + 1$ Vu

ici, comme $y_2' = 2x \operatorname{Log} x$

$y_2'' = 2(\operatorname{Log} x + 1)$, qui s'annule pour $x = e^{-1}$

, c'est-à-dire $x = \frac{1}{e} \simeq 0,37$. Alors $f_2\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2} - \frac{1}{2e^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{e^2} \simeq -0,21$.

3°/ Calcul de l'aire S

$f_1(x) = x \operatorname{Log} x$ et $f_1(x) \leqslant 0$ sur $]0, 1]$

Observons le graphique. La boucle en question admet l'axe $y'Ox$ pour axe de symétrie.

Nous aurons donc $\frac{S}{2} = -\lim_{\lambda \to 0_+} \int_\lambda^1 x \operatorname{Log} x \, dx$

* Calcul de $\int_\lambda^1 x \operatorname{Log} x \, dx$; $0 < \lambda < 1$.

Faisons une intégration par parties $\begin{cases} u = \operatorname{Log} x \\ v' = x \end{cases}$ donc $\begin{matrix} u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{matrix}$

$$I = \int_\lambda^1 x \operatorname{Log} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{Log} x \right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx$$

Donc :

$$I = \frac{1}{2}\text{Log}\,1 - \frac{\lambda^2}{2}\text{Log}\,\lambda - \frac{1}{2}\int_\lambda^1 x\,dx$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2}\text{Log}\,\lambda - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\lambda^1$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2}\text{Log}\,\lambda - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)$$

$$I = -\frac{\lambda^2}{2}\text{Log}\,\lambda + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{4}$$

* Calcul de $\frac{S}{2}$

$$\frac{S}{2} = -\lim_{\lambda \to 0_+} I = -\lim_{0_+}\left(-\frac{\lambda^2}{2}\text{Log}\,\lambda + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

Comme $\lim\limits_{\lambda \to 0_+} -\frac{\lambda}{2}(\lambda \text{Log}\,\lambda) = 0$ car $\lim\limits_{\lambda \to 0_+} \lambda\,\text{Log}\,\lambda = 0$

et comme $\lim\limits_{0_+} \frac{\lambda^2}{4} = 0$, il s'ensuit que $\lim\limits_{0} I = -\frac{1}{4}$

$$\frac{S}{2} = -\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Vu

$$\boxed{S = \frac{1}{2}}$$

4°/ $\frac{S}{2} = \frac{1}{4} = \delta'$

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Soit $\delta(x_0, 0)$.

Deux cas sont à considérer :

* si $x_0 < 1$, alors, du calcul précédent il résulte que l'aire comprise entre (Δ), l'axe $(O,\vec{i})$, la courbe (C_1) et le point A sera égale à $\frac{S}{2}$ si et seulement si $x_0 = 0$. On peut retrouver ce résultat par le calcul (voir en fin de copie)

* Si $x_0 > 1$, alors $\delta' = \int_1^{x_0} f_1(x)\,dx > 0$ car $\begin{cases} x_0 > 1 \\ \text{et} \\ f_1 \geq 0 \end{cases}$

$$J = \int_1^{x_0} f_1(x)\,dx = \int_1^{x_0} x \operatorname{Log} x\,dx$$

posons $\begin{cases} u = \operatorname{Log} x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$J = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{Log} x\right]_1^{x_0} - \int_1^{x_0} \frac{1}{x}\,\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{x_0^2 \operatorname{Log} x_0}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{x_0}$$

$$J = \frac{x_0^2 \operatorname{Log} x_0}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_0^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

et on veut que $J = S'$

$$\frac{x_0^2 \operatorname{Log} x_0}{2} - \frac{x_0^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$2x_0^2 \operatorname{Log} x_0 - x_0^2 = 0$$

$$x_0^2\,(2\operatorname{Log} x_0 - 1) = 0$$

On retrouve la solution $x_0 = 0$ mais dans ce cas, celle-ci est à écarter (car $x_0 > 1$).

Enfin, on trouve : $\operatorname{Log} x_0 = \frac{1}{2} \iff \boxed{x_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \simeq 1{,}64}$

5°/

Discussion graphique de $a(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

L'aire algébrique comprise entre $(O, \vec{i})$, C_1 et O et A est négative, et elle représente l'aire algébrique minimale possible.

On a vu que ~~cette~~ la valeur absolue de cette aire était égale à $S' = \frac{1}{4}$. Donc $k > -\frac{1}{4}$

Ensuite, comme $y_1 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, on suppose qu'il est possible d'associer à n'importe quel réel positif une aire algébrique.

Nous pouvons vérifier cela en calculant :

$$K = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x f_1(x)\,dx .$$

Si $K \to +\infty$, alors nos présomptions seront vérifiées, ~~car, alors~~, car

$\int_1^x f_1(x)\,dx - \frac{1}{4}$ tendra vers ~~l'infini~~ $+\infty$.

$$\int_1^x f_{01}(x)\,dx = K = J = \frac{x^2 \operatorname{Log} x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$$

et $\lim_{x\to+\infty} K = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\operatorname{Log} x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4x^2}\right) = +\infty$.

Donc, pour qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ / $a(x) = k$, il faut et il suffit que $k > -\frac{1}{4}$.

Observons alors le graphique.

Si $k = 0$, $\exists$ 2 solutions : $x = 1$ solution de $a(x) = 0$, et $x = x_0 = e^{\frac{1}{2}}$ solution.

Si $-\frac{1}{4} < k < \frac{1}{4}$, $\exists$ 2 solutions x' et x'' telles que $0 < x' < 1$ et $1 < x''$

Si $k > \frac{1}{4}$, $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ et $x > e^{\frac{1}{2}}$.

X

?

(

Exercice 1

$(a, b, c, d, e) \in \mathbb{N}^5$.

Posons $u_1 = a$, $u_2 = b$, ..., $u_5 = e$.

On sait que $u_n = q^{n-1} u_1$, q désignant la raison de la progression géométrique.

On veut avoir la condition (1) : $6a^2 = e - b$

Or $e = u_5 = q^4 u_1 = q^4 a$

$b = qa$

donc : (1) $6a^2 = q^4 a - qa$

Nous écarterons le cas où $a = 0$, car $\Delta(0, q) = 1$, $q > 1$ et $q \in \mathbb{N}$ n'a aucun sens.

Donc (1) : $6a = q(q^3 - 1)$

$$6a = q(q^3 - 1) \qquad (2)$$

(2) peut s'écrire : $q(q-1)(q^2+q+1) = 6a$

Or $\Delta(q, a) = 1$ et q divise $6a$. Il s'ensuit que (cf théorème de Gauss) q divise 6. $\exists k \in \mathbb{Z}$ / $q\,k = 6$.

Les diviseurs entiers naturels possibles de 6 sont : 1 ou 2 ou 3 ou 6.

/

$q=1$ est à écarter, car $q>1$.

Donc $q \in \{2, 3, 6\}$.

* Est-ce que $q=2$ convient?

Alors (2) : $6a = 2\ (7)$

$a = \frac{7}{3} \notin \mathbb{N}$.

non

* Est-ce que $q=3$ convient?

Alors (2) : $6a = 3\ (26)$

$a = 13$

On vérifie que $\Delta(3, 13) = 1$.

oui

* Est-ce que $q=6$ convient?

Alors (2) : $6a = 6\ (215)$

$a = 215$

Est-ce que $\Delta(215, 6) = 1$?

On a $215 = 6 \times 35 + 5$

$6 = 5 \times 1 + 1$

On sait que $\Delta(215, 6) = \Delta(5, 1)$

$\Delta(5, 1) = 1$

Donc $q=6$, $a=215$ conviennent.

Vérifications.

α) $q=3$, $a=13$

La suite (S_1) obtenue est :

13 ; 39 ; 117 ; 351 ; 1053.

et l'on a :

$6 \cdot 13^2 = 1053 - 39$

$6 \cdot 169 = 1014$

$1014 = 1014$

oui

B) $q = 6$, $a = 215$

(S_2) : . 215 ; 1290 ; 7740 ; 46440 ; 278640 .

On vérifiait que $6 \cdot 215^2 = 278\,640 - 1290$

$277\,350 = 277\,350$

exact.

Les 2 suites (S_1) et (S_2) conviennent en effet.

II exercice.

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}, \quad t \longmapsto \varphi(t)$$

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \vec{E}$$
$$t \longmapsto \overrightarrow{F(t)} = \left(\varphi(t) + \frac{1}{\varphi(t)}\right)\vec{i} + \left(\varphi(t) - \frac{1}{\varphi(t)}\right)\vec{j} - 2\varphi(t).\vec{k}$$

1°/

$\varphi'(t) = \lambda\varphi(t)$ (1)

Coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}_M$ du mobile à la date t.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F(t)}$

$$\vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(\varphi'(t) - \frac{\varphi'(t)}{[\varphi(t)]^2}\right)\vec{i} + \left(\varphi'(t) + \frac{\varphi'(t)}{[\varphi(t)]^2}\right)\vec{j} - 2\varphi'(t)\vec{k}$$

Compte tenu de (1)

$$\boxed{\vec{V}_M = \left(\lambda\varphi(t) - \frac{\lambda}{\varphi(t)}\right)\vec{i} + \left(\lambda\varphi(t) + \frac{\lambda}{\varphi(t)}\right)\vec{j} - 2\lambda\varphi(t)\vec{k}}$$

Coordonnées de $\vec{\Gamma}_M$

$$\vec{\Gamma}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}_M}{dt}$$

$$\vec{\Gamma}_M = \left(\lambda\varphi'(t) - \lambda\left(-\frac{\varphi'(t)}{[\varphi(t)]^2}\right)\right)\vec{i} + \left(\lambda\varphi'(t) + \lambda\left(-\frac{\varphi'(t)}{[\varphi(t)]^2}\right)\right)\vec{j} - 2\lambda\varphi'(t)\vec{k}$$

Eu égard à (1) :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_M = \left(\lambda^2 \varphi(t) + \lambda^2 \frac{1}{\varphi(t)}\right)\vec{i} + \left(\lambda^2 \varphi(t) - \frac{\lambda^2}{\varphi(t)}\right)\vec{j} - 2\lambda^2 \varphi(t)\,\vec{k}}$$

$\vec{\Gamma}_M = \lambda^2 \overrightarrow{OM}$

Si $\overrightarrow{F(t)}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{\Gamma}_M \begin{pmatrix} \lambda^2 x \\ \lambda^2 y \\ \lambda^2 z \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{\Gamma}_M$ et $\overrightarrow{OM}$ sont donc colinéaires et de même sens.

Calcul de $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}$.

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge (\lambda^2 \overrightarrow{OM})$

$= \lambda^2 \left[\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM}\right]$ (où $\wedge$ = forme bilinéaire)

$= \vec{0}$

(On aurait pû tout de suite le dire car $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{\Gamma}$ sont colinéaires).

2°/

On sait (of course) que l'ensemble (E) des fonctions $y = f(x)$ telles que $y' - ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$ est formé des fonction $f(x) = k e^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$.

Ici, $\varphi'(t) - \lambda \varphi(t) = 0 \quad \mapsto \quad \boxed{\varphi(t) = k e^{\lambda t}} \quad k \in \mathbb{R}$

3°/ $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ $(k = 1)$

$\vec{W} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_M$

$\overrightarrow{OM}$

$\varphi(t) + \frac{1}{\varphi(t)}$

$\vec{W} = \vec{OM} \wedge \vec{V}_M$ $\qquad \varphi(t) = e^{\lambda t}$

$\vec{OM}$	$\vec{V}_M$	
$e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}$	
$e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}$	} p
$-2e^{\lambda t}$	$-2\lambda e^{\lambda t}$	
$e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}$	} q
$e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}$	} r

Annoncez que p, q, r désignent 3 déterm

$p = -2\lambda e^{2\lambda t - t^2} + \underbrace{2\lambda e^{\circ}}_{2\lambda} + 2\lambda e^{2\lambda t} + \underbrace{2\lambda e^{\circ}}_{2\lambda}$

$p = 4\lambda$

$q = -2\lambda e^{2\lambda t} + 2\lambda e^{\circ} + 2\lambda e^{2\lambda t} + 2\lambda e^{\circ}$

$q = 4\lambda$

$r = \lambda e^{2\lambda t} + \lambda e^{\circ} + \lambda e^{\circ} + \lambda e^{-2\lambda t} - \lambda \left(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right)^2$

$= \lambda e^{2\lambda t} + \lambda e^{-2\lambda t} + 2\lambda - \lambda e^{2\lambda t + t^2} - \lambda e^{-2\lambda t} + 2\lambda e^{\circ}$

$r = 4\lambda$

$\vec{OM} \wedge \vec{V}_M = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ 4\lambda \\ 4\lambda \end{pmatrix} = \vec{W}$ $\qquad (\lambda \in \mathbb{R})$ Le vecteur $\vec{W}$ est donc constant.

$\vec{W}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} = \vec{OM} \wedge \vec{\Gamma}_M$

Conclusions

On sait que $\vec{\Gamma}_M$ est colinéaire à $\vec{OM}$ puisque $\vec{OM} \wedge \vec{\Gamma}_M = \vec{0}$.

D'autre part, on sait que $\vec{OM} \wedge \vec{V}_M$ = vecteur constant (une fois que λ est fixé). $\vec{W}$ est constant, et il est constamment orthogonal au vecteur $\vec{OM} = \vec{u}$ et au vecteur $\vec{E}_M$ ou vitesse $\vec{V}_M$ qui, on le sait, est constamment tangent à la trajectoire de M.

$\vec{W} = \overrightarrow{\text{constante}} \leftrightarrow$ le plan $(\vec{OM}, \vec{V}_M)$ a une direction constante. Le mouve

_ment de M s'effectue donc dans un plan affine de direction le plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation cartésienne : $4\lambda X + 4\lambda Y + 4\lambda Z = 0$

supposons $\lambda \neq 0$: $X + Y + Z = 0$. $(\vec{P})$

Remarquons que si $\lambda = 0$, $\varphi(t) = e^0 = 1$, et $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 2\vec{k}$. Alors F est une application constante, qui manque d'intérêt.

Vérification des conclusions

Prenons une base orthonormé de $\vec{P}$: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec $\begin{cases} \vec{e}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \vec{e}_2 \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{cases}$

Si le mouvement de M se fait dans un plan (P) de direction $\vec{P}$, alors $\overrightarrow{OM}$ peut s'exprimer en fonction des 2 vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de la base $\mathcal{B}'$ de $\vec{P}$,

$$\forall \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$$

$$= \frac{x_1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{y_1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \left(\frac{-x_1}{\sqrt{2}} + \frac{y_1}{\sqrt{2}} \right)\vec{k}$$

d'où $x = \frac{x_1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{y_1}{\sqrt{2}}$ et $z = -\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{y_1}{\sqrt{2}} = -x - y$ compatible

Pour $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, on trouve : $\overrightarrow{OM} = \left(\varphi(t) + \frac{1}{\varphi(t)} \right)\sqrt{2}\,\vec{e}_1 + \left(\frac{1}{\varphi(t)} - \varphi(t) \right)\sqrt{2}\,\vec{e}_2$

---

problème III, 4°/a)

$\delta(x_0, 0)$ et $x_0 < 1$.

On a vu que (cf III 4°/b) $J = \int_1^{x_0} x \operatorname{Log} x \, dx = \frac{x_0^2 \operatorname{Log} x_0}{2} - \frac{x_0^2}{4} + \frac{1}{4}$

Comme, dans ce cas, $x_0 < 1$, et comme pour $x \in]0, 1]$, f_1 ~~(x) ≤ 0~~ C_1 est "en dessous" de l'axe $(O, \vec{i})$, il s'ensuit que l'aire géométrique S' doit être égale à $J > 0$.

On retrouve exactement le même calcul que pour le b.

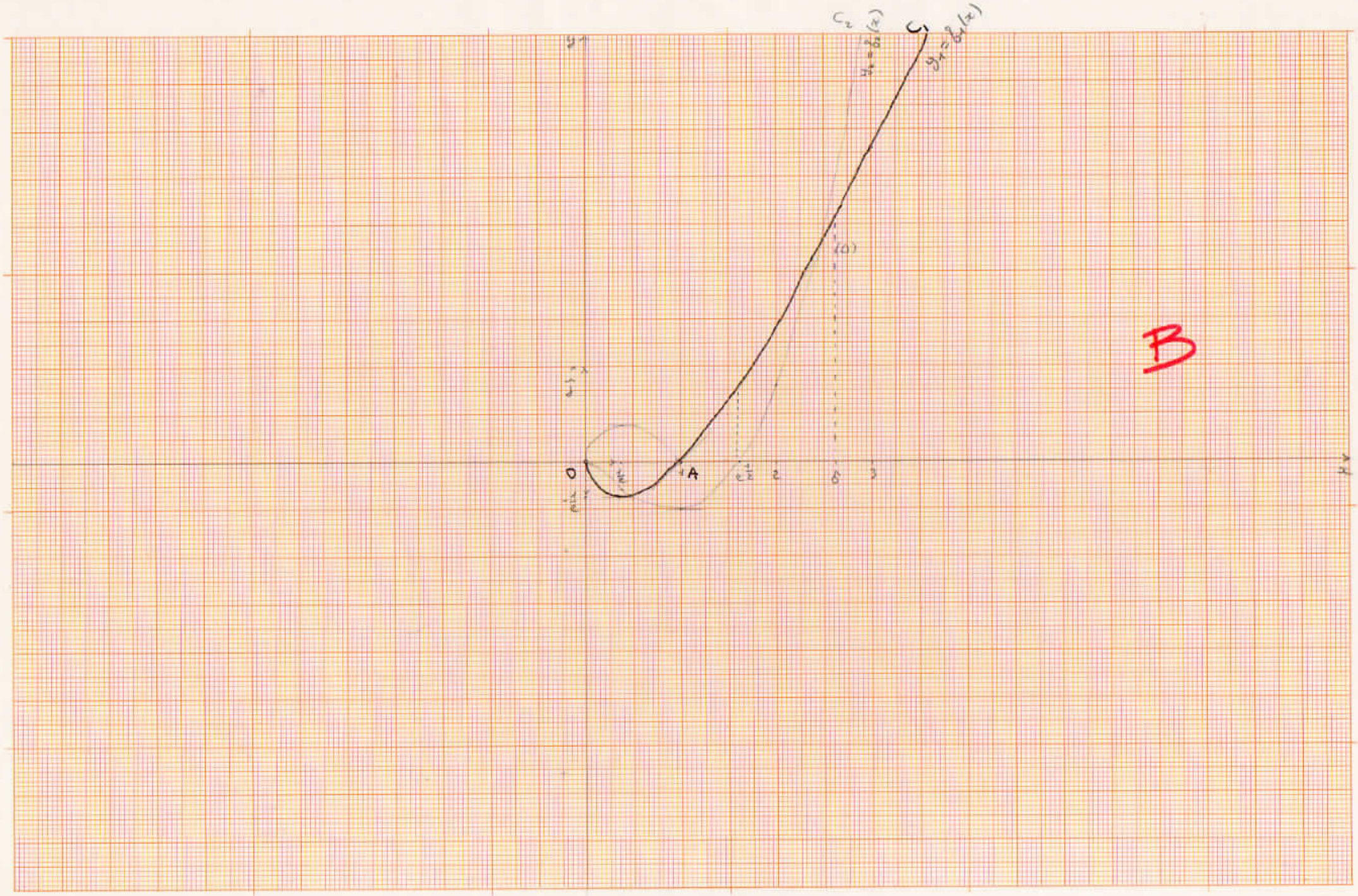
On arrive à : $x_0^2 (2 \operatorname{Log} x_0 - 1) = 0$.

on retrouve $x_0 = 0$ comme solution. Mais pour $x_0 = 0$, f_1 n'est pas défini.

Cependant l'aire comprise entre $\delta = 0$ = origine du repère, C_1, $(O, \vec{i})$ et A est égale à l'aire S'. $\delta = 0$ est accepté (cf extension de la notion d'intégrale).

Dans ce cas ($x_0 < 1$), la solution $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$ est à rejeter.

MERCIER TC2

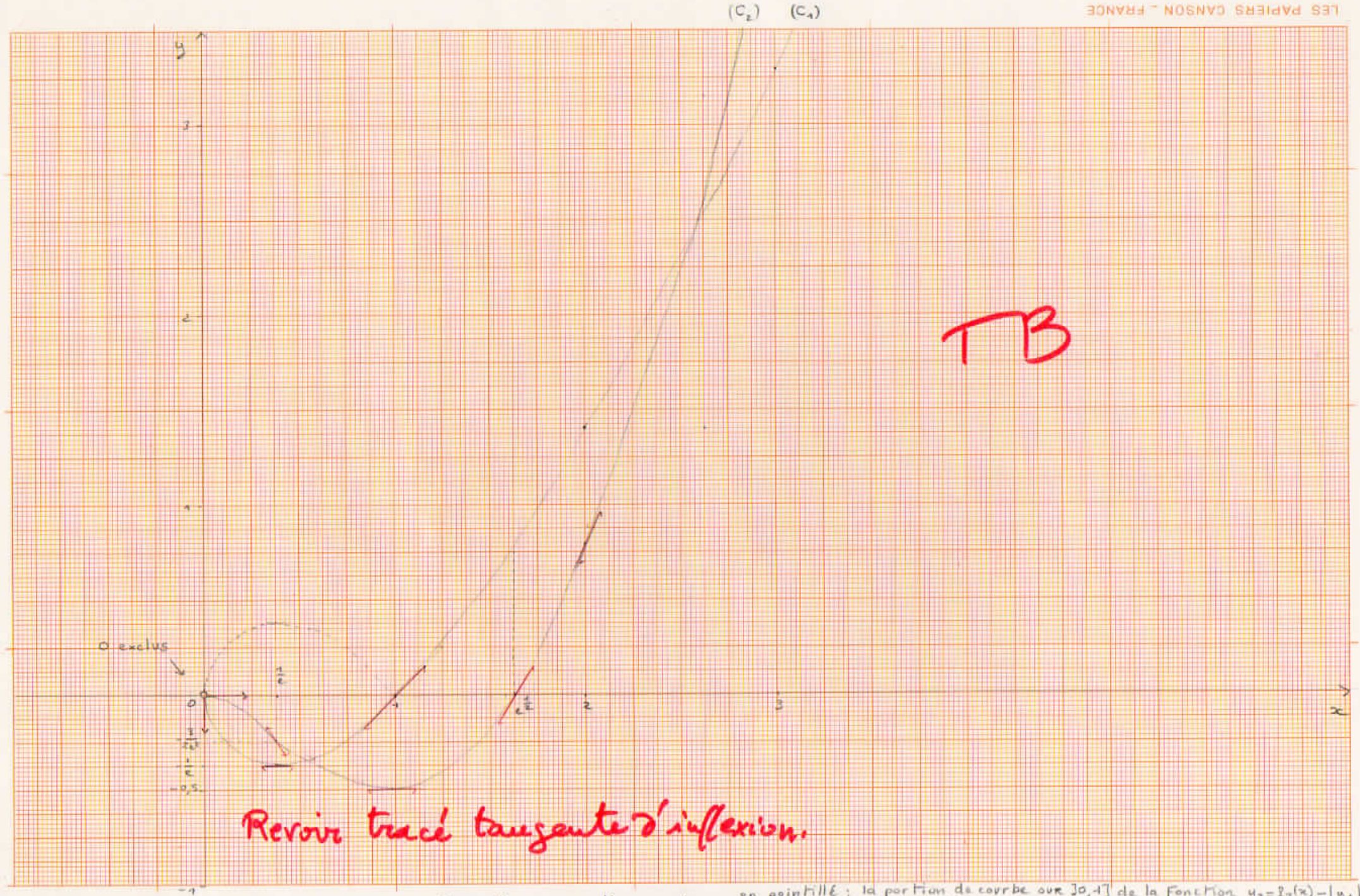


LES PAPIERS CANSON _ FRANCE

(fig 1) allure des courbes

MERCIER TC2

LES PAPIERS CANSON - FRANCE



TB

Revoir tracé tangente d'inflexion.

(fig 2) agrandissement.

en pointillé : la portion de courbe sur $]0,1]$ de la fonction $y_3 = f_3(x) = |y_4|$ elle se déduit de l'arc de C_4 sur $]0,1]$ par symétrie orthogonale par rapport à l'axe $0x$.